今後の研究計画

森本真弘

1. 極作用の幾何解析

リーマン多様体へのリー群等長作用であって，各軌道と交わりかつ交点で直交する部分多様体が存在するような作用を**極作用**と呼ぶ．極作用の歴史は古く，モース理論やリー理論等，様々な手法により研究がなされてきた．本研究では,「ヒルベルト空間への持ち上げ」という幾何解析の手法により極作用を研究する．この研究を通して，連結リー群による単連結リーマン多様体への極作用が例外軌道を持たないこと (Alexandrino-Töben 2006) の幾何学的な証明や，階数 2 以上のコンパクト対称空間への極作用が超極となること (Kollross-Lytchak 2013) について，分類結果を用いない幾何学的証明を与える．

2. Hermann 作用の極小軌道一意性について

リーマン多様体へのリー群等長作用が与えられたとき，その軌道で極小部分多様体となるもの（極小軌道）を決定することは重要な問題である．コンパクト対称空間 G/K に対し，そのイソトロピー表現の軌道類の各階層の中に，極小軌道がただ一つ存在することが知られている (Hirohashi-Tasaki-Song-Takagi 2000)．同様の事実は，G/K のイソトロピー作用や，より一般に，可換な Hermann 作用に対しても成り立つことが示されている (Ikawa 2011)．これを更に，可換とは限らない一般の Hermann 作用の場合へ拡張することが本研究の目的である．非可換な Hermann 作用に対して，その軌道空間をルート系により記述することから始め，定理が成り立つ場合にはその証明を，成り立たない場合にはその反例を挙げる．この問題は，後述する affine Kac-Moody 対称空間のイソトロピー表現における極小軌道一意存在性と直結する重要な問題であると考える．

3. affine Kac-Moody 対称空間のイソトロピー表現の極小軌道

C.-L. Terng により提案され，E. Heintze，B. Popescu，W. Freyn らにより確立された **(affine) Kac-Moody 対称空間**は，Kac-Moody 理論に基づく無限次元対称空間であり，有限次元リーマン対称空間と顕著な類似性を持つ．特にそのイソトロピー表現が，論文 [5] や [6] で扱った Hermann 作用やシグマ作用から誘導される path 群作用で記述できる．本研究では，Kac-Moody 対称空間のイソトロピー表現の極小軌道一意性について研究する．有限次元コンパクト対称空間において，そのイソトロピー表現の軌道類の各階層の中に，極小軌道が唯一つ存在することが知られている．私は，同様の事実が Kac-Moody 対称空間においても成立すると予想する．この予想を検証し，証明することを目標とする．更に，極小軌道がもつ対称性についても研究し，有限次元の場合の先行研究との比較を行い，類似性・相違性を明らかにする．

4. ソリトン理論の affine Kac-Moody 群による再定式化

柏原正樹氏，神保道夫氏，伊達悦朗氏，三輪哲二氏らの研究により，ソリトン方程式の解空間の対称性を Kac-Moody 代数により記述することができる．一方で，C.-L. Terng, K. Uhlenbeck らの研究により，可積分系方程式の解空間の変換をループ群作用により記述できる．これら 2 つの研究は，独立に行われることが多く，その相互関係は未だ明らかでない．**(affine) Kac-Moody 群**とは，Kac-Moody 代数に対応する群であり，近年の無限次元部分多様体論の発展および Kac-Moody 対称空間論の確立によって，その実態が明らかとなってきた．Kac-Moody 群は，テイム・フレシェ多様体 (Hamilton 1982) の枠組みにおいて，捩れループ群上のトーラス T^2 束として実現可能され，定義から双方の可積分系理論と相性が良いと考えられる．本研究では，上記 2 つのソリトン理論を，Kac-Moody 群を通して統一的に理解することを目標とする．