これまでの研究成果

岡崎真也

3 次元球面 S^3 に埋め込まれた種数 2 のハンドル体を種数 2 のハンドル体結び目と呼び, H で表す．ふたつのハンドル体結び目が同値であるとは一方が他方に S^3 のアイソトピーでうつることをいう.

ハンドル体結び目 H とそのメリディアン系 M に対して, その d 番目のアレクサンダー多項式を $\varDelta^{(d)}_{(H,M)}(t_1, t_2)$ とする．アレクサンダー多項式 $\varDelta^{(d)}_{(H,M)}(t_1, t_2)$ は H と M の組の不変量であり, メリディアン系の取り替えはアレクサンダー多項式に $GL(2, \mathbb{Z})$ として作用する.

H をメリディアンディスクで切り開き S^3 内で結ばれた 2 つのソリッドトーラスを得たとする．それを絡み目とみなし, H の内在的絡み目 L という．ハンドル体結び目に対して, このようなメリディアンディスクは無限に存在するので, ハンドル体結び目の内在的絡み目も無限に存在する．2 成分絡み目 $L = K_1 \cup K_2$ に対して S^3 内に K_1 と K_2 を分離する 2 次元球面 S^2 がとれるとき, L を分離絡み目という．$\varDelta_K(t)$ を結び目 K のアレクサンダー多項式とするとき, ハンドル体結び目 H の内在的分離絡み目に対して次のような性質が示せた.

定理 1 [O.]
$L = K_1 \cup K_2$ と $L' = K'_1 \cup K'_2$ をハンドル体結び目 H の内在的分離絡み目とする．このとき $\varDelta_{K_1}(t) = \varDelta_{K'_1}(t)$ かつ $\varDelta_{K_2}(t) = \varDelta_{K'_2}(t)$ または $\varDelta_{K_1}(t) = \varDelta_{K'_2}(t)$ かつ $\varDelta_{K_2}(t) = \varDelta_{K'_1}(t)$ が成り立つ.

$\Gamma = L \cup c = K_1 \cup K_2 \cup c$ をハンドル体結び目 H を表す手錠型グラフとする．ここで c は Γ のチェインである．m_1 と m_2 をそれぞれ K_1 と K_2 のメリディアンとし, $M = \{m_1, m_2\}$ とする．定理 1 の系として以下が示せた.

系 2 [O.]
$L = K_1 \cup K_2$ が分離絡み目であるような任意の手錠型グラフ Γ に対して, あるローラン多項式 $p(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ で $p(1, t_2) = p(t_1, 1) = 1$ を満たすものが存在して, $\varDelta^{(2)}_{(\Gamma,M)}(t_1, t_2) = \varDelta_{K_1}(t_1)\varDelta_{K_2}(t_2)p(t_1, t_2)$ と表せる．また任意のローラン多項式 $p(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ で $p(1, t_2) = p(t_1, 1) = 1$ を満たすものに対して, $\varDelta^{(2)}_{(\Gamma,M)}(t_1, t_2) = \varDelta_{K_1}(t_1)\varDelta_{K_2}(t_2)p(t_1, t_2)$ を満たす手錠型グラフ $\Gamma = L \cup c = K_1 \cup K_2 \cup c$ が具体的に構成できる.