# これからの研究計画 (作成者： 齋藤 洋介)

記号について補足する. $|q|<1$, $|p|<1$ なる複素数 $q$, $p$ に対し

$$\bullet\ \theta_p(x) := \prod_{n\geq 0}(1-xp^n)(1-x^{-1}p^{n+1}), \quad \bullet\ \Gamma_{q,p}(x) := \prod_{m,n\geq 0}\frac{1-x^{-1}q^{m+1}p^{n+1}}{1-xq^m p^n} \quad (x\in\mathbb{C}\backslash\{0\})$$

とおく. $\theta_p(x)$ はテータ関数, $\Gamma_{q,p}(x)$ は楕円ガンマ関数と呼ばれる. オイラー微分を $D_x = x\dfrac{\partial}{\partial x}$ と書き $E_k(x;p) := -{D_x}^k \log\theta_p(x)$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0})$ とおく.

$N$ を自然数, $\beta$ を複素数, $p$ を $|p|<1$ なる複素数とする. 楕円 Calogero-Moser 系のハミルトニアン $H_N^{\mathrm{CM}}(\beta,p)$ を次で定める：

$$\bullet\ H_N^{\mathrm{CM}}(\beta,p) := \sum_{i=1}^{N}{D_{x_i}}^2 - \beta(\beta-1)\sum_{1\leq i\neq j\leq N}E_2(x_i/x_j;p).$$

ここで次のことが知られている：$\Psi_N(x;\beta,p) := \displaystyle\prod_{1\leq i\neq j\leq N}\theta_p(x_i/x_j)^{\beta/2}$ とおくと

$$\bullet\ H_N^{\mathrm{CM}}(\beta,p)\Psi_N(x;\beta,p) = \{2N\beta D_p + C_N(\beta,p)\}\Psi_N(x;\beta,p). \cdots(*)$$

この右辺にある $C_N(\beta,p)$ は $N$, $\beta$, $p$ で決まるある複素数である. ここで, 上の $(*)$ の右辺に $D_p = p\dfrac{\partial}{\partial p}$ が現れていることに注目してほしい. これは, 楕円 Calogero-Moser 系の解として, 楕円モジュラス $p$ の無限小変形を伴うものが存在することを意味する.

$N$ を自然数, $q$, $p$ を $|q|<1$, $|p|<1$ なる複素数, $t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ とするとき, 楕円 Ruijsenaars 系のハミルトニアン $H_N^{\mathrm{R}}(q,t,p)$ は次で定義される：

$$\bullet\ H_N^{\mathrm{R}}(q,t,p) := \sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\left\{\frac{\theta_p(tx_i/x_j)\theta_p(qt^{-1}x_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)\theta_p(qx_i/x_j)}\right\}^{\frac{1}{2}} T_{q,x_i} \quad \left(\begin{array}{c} T_{q,x}\ \text{は}\ T_{q,x}f(x)=f(qx) \\ \text{と働く}\ q\text{-シフト作用素}\end{array}\right).$$

ここで $\Psi_N(x;q,t,p) := \displaystyle\prod_{1\leq i\neq j\leq N}\left\{\frac{\Gamma_{q,p}(tx_i/x_j)}{\Gamma_{q,p}(x_i/x_j)}\right\}^{1/2}$ とおくと

$$\bullet\ H_N^{\mathrm{R}}(q,t,p)\Psi_N(x;q,t,p) = t^{\frac{-N+1}{2}}\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)}\Psi_N(x;q,t,p)\cdots(**)$$

が成り立つ. ここで $t=q^\beta$ とおいて適当に $q\to 1$ とすると, 上の $(**)$ から $(*)$ が得られる. よって, $(**)$ の中には, 楕円モジュラス $p$ の何らかの意味での差分変形を引き起こす作用素が含まれている可能性がある. この点について, 楕円 Calogero-Moser 系の知見や, Felder-Varchenko らが提唱した「$q$-KZB heat equation」の理論, 白石が導入した「non-stationary Ruijsenaars function」の理論, Koroteev-Shakirov らが導入した「quantum double-elliptic system (DELL system)」などを参考にして研究を進める.