今後の研究計画

佐々木真二

1　2 階方程式の標準形の理論

これまでの研究の方で述べたように, 二重変わり点の近傍での標準形への変換の Borel 総和可能性の証明方法を応用することで, 様々な標準形への変換の Borel 総和可能性を示せると期待されている; 単純変わり点の対の近傍での変換 (これは証明済 [7] だが, 簡単な別証明が得られる), いわゆる ghost 点の近傍での変換, 単純変わり点の 3 つ以上の組の近傍での変換, etc. これらの変換は F. Pham によって resurgent になると予想 (主張) されているが, それを支持するような結果になる. これらの研究は既に進行中であり, 順調に進んでいる. こういった変換の研究は下述の Painlevè 方程式とも関係し, 重要である. (Painlevè 方程式の完全 WKB 解析においては, 二重変わり点と単純変わり点の組, などが現れる。)

2　Painlevè 方程式の完全 WKB 解析の基礎付け

Painlevè 方程式の完全 WKB 解析は青木, 河合, 竹井らによって精力的に研究されたが, 当時はまだ 2 階線形方程式の WKB 解の Borel 総和可能性すらきちんと整備されておらず, それゆえ多くの計算が形式的である. しかしその後, 神本や小池によっていわゆる 0-パラメーター解や 1-パラメーター解については解析的な意味付けがなされた. また 2-パラメーター解についても近年, 竹井によってその解析的意味付けの方向性が示された. また, Painlevè 方程式の解析においては自然に, その付随する線形方程式に二重変わり点が現れ, 二重変わり点の近傍における標準形への変換を考えることになるが, (線形方程式のみを考えた場合の) 二重変わり点の近傍での変換の Borel 総和可能性を, 前述の通り私が与えた (ただし Painlevè 方程式の完全 WKB 解析における二重変わり点の近傍での変換はより複雑なものであり, その問題が完全に解決されたわけではない). このように Painlevè 方程式の完全 WKB 解析の基礎付けを与えるための様々な要素が揃ってきており, したがってその解決を目指す. 特に, 2-パラメーター解の解析的意味付けと, 標準形 (Painlevè I 型方程式) への変換の解析的な意味付けを目指す. とりわけ後者は, 線形方程式の二重変わり点近傍での変換を扱った自分自身の研究の自然な後続となる.

3　高階方程式の WKB 解の Borel 総和可能性, 標準形の理論

高階方程式の完全 WKB 解析は近年, 幾何学や数理物理学といった分野でも現れるようになっており, WKB 解の Borel 総和可能性をはじめとした基礎的問題の解決がより望まれるようになってきている. そして私自身のここ数年の主テーマとして, 高階方程式の WKB 解の Borel 総和可能性を掲げて研究してきた.

しかし, これは問題の重要性・困難性が認識されてから約 40 年未解決の極めて難しい問題であり, 私自身も大きな進展を得ることができなかった. したがって当面は研究の副テーマの一つとして扱い, 完全最急降下法による実例の解析といった知見集めを粘り強く続けつつ, 将来的な解決を目指す. さらにその先には, 高階方程式における標準形の理論 (主に変換の Borel 総和可能性) を見据えている. これもまた, 高階方程式における Stokes 現象の解析や二重変わり点における分岐現象の解析といった自身の過去の研究の自然な後続である.