今後の研究計画

高溝 史周

$\beta > 1$ とする。Frougny と Solomyak は次の 3 つの有限性条件を提案した。

$$(\mathrm{F}_1)\quad \mathbb{N} \subset \mathrm{Fin}(\beta)$$

$$(\mathrm{PF})\quad \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] \subset \mathrm{Fin}(\beta)\ where\ \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] = \{\sum_{k=1}^{n} a_k \beta^{-k} \mid a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

$$(\mathrm{F})\quad \mathbb{Z}[\beta^{-1}]_{\geq 0} \subset \mathrm{Fin}(\beta)\ where\ \mathbb{Z}[\beta^{-1}]_{\geq 0} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k \beta^{-k} \mid a_k \in \mathbb{Z}\} \cap [0, \infty)$$

ここに $\mathrm{Fin}(\beta)$ は有限ベータ展開をもつ非負数 x の全体である。$\beta \in (\mathrm{F}_1)$ なら、β は Pisot 数と呼ばれる代数的整数となることが知られており、また β が代数的整数のときは $\mathbb{Z}[\beta] \subset \mathbb{Z}[\beta^{-1}]$ が成り立つため、(PF)は $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] = \mathrm{Fin}(\beta)$ と、(F)は $\mathbb{Z}[\beta^{-1}]_{\geq 0} = \mathrm{Fin}(\beta)$ と同値である。これらをまとめると次のようになる。

	β のクラス	$\mathrm{Fin}(\beta)$ の代数構造	(F)となるための条件	(PF)となるための条件
(F_1)	Pisot 数	?	?	?
(PF)	Pisot 数	和・積に関して閉	$d_\beta(1)$ が有限	—
(F)	Pisot 数	和、積、差に関して閉	—	—

ただし、差に関して閉とは、$x, y \in \mathrm{Fin}(\beta)$ $(x < y)$ なら $y - x \in \mathrm{Fin}(\beta)$ となるときに言う。

表からも分かるように(F_1)については未だ詳しく分かっていない。しかし最近、私は $\beta \in (\mathrm{F}_1) \setminus (\mathrm{PF})$ となる β を発見した。そこで今後、(F_1)に関する性質について以下のテーマに取り組む所存である。

1. $(\mathbf{F_1})$ の必要十分条件について

代数的整数 $\beta > 1$ の最小多項式を $x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1 x - a_0$ とし、$\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ に対し τ を

$$\tau(\boldsymbol{l}) \coloneqq (l_2, \cdots, l_{d-1}, -\lfloor \lambda(\boldsymbol{l}) \rfloor)$$

$$where\ \lambda(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l} \cdot (a_0\beta^{-1}, a_1\beta^{-1} + a_0\beta^{-2}, \cdots, a_{d-2}\beta^{-1} + \cdots + a_0\beta^{-d+1})$$

と定義する。ここに $\cdot$ は内積である。このとき、τ はベータ変換 T に対応する $\mathbb{Z}^{d-1}$ 上の変換で shift radix system (SRS)と呼ばれる。特に $\{\lambda\}(\boldsymbol{l}) \coloneqq \{\lambda(\boldsymbol{l})\}$ とすると、τ は可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{d-1} & \overset{\tau}{\to} & \mathbb{Z}^{d-1} \\ \{\lambda\}\downarrow & & \downarrow\{\lambda\} \\ \mathrm{Fin}(\beta) \cap [0,1) & \underset{T}{\to} & \mathrm{Fin}(\beta) \cap [0,1) \end{array}$$

を満たす。よって $F_\beta := \{\boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid \exists k \geq 0;\ \tau^k(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{0}\}$ とおくと，$\{\lambda\}(F_\beta) \subset \mathrm{Fin}(\beta) \cap [0,1)$ が成り立つ．次に

$$Q_\beta \coloneqq \{\boldsymbol{l} = (l_1, \cdots, l_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid \exists \{\boldsymbol{l}_n\}_{n=1}^{N}\ s.t.\ \boldsymbol{l}_N = \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{l}_{n+1} \in \{\tau(\boldsymbol{l}_n), \tau^*(\boldsymbol{l}_n)\}\ \&\ \boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{e}\}$$

$$where\ \boldsymbol{e} := (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{Z}^{d-1}\ \&\ \tau^*(\boldsymbol{l}) := -\tau(-\boldsymbol{l})$$

とおく。このとき、β が Pisot 数なら Q_β は有限集合となることが知られている。最近の研究で、私は、

$$\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta\ \&\ \{\sum_{n}^{r} a_k \tau^k(\boldsymbol{e}) \mid a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cap [-\delta, \delta]^{d-1} \subset F_\beta$$

$$where\ P_\beta := \{\boldsymbol{l} \in Q_\beta \mid \exists k > 0;\ \tau_\beta^k(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l}\}\ \&\ \delta \coloneqq \max\{|l_j| \mid (l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \in P_\beta\}$$

が (F_1) の十分条件となることを発見した。そこで現在、私はこの条件が $\beta \in (\mathrm{F}_1) \setminus (\mathrm{PF})$ であるための β の必要十分条件ではないかと予想しており、今後はこの予想の解決に向けて研究を続けるつもりである。

2. $\boldsymbol{\beta}$ が $(\mathbf{F_1})$ を満たすときの $\mathbf{Fin}(\boldsymbol{\beta})$ の代数構造について

上の表からも分かるように、$\beta \in (\mathrm{F}_1)$ であるときの $\mathrm{Fin}(\beta)$ の代数構造は分かっていない。しかし、私は $\beta \in (\mathrm{F}_1)$ のときに $\mathrm{Fin}(\beta)$ が積で閉じるのではないかと予想している。そこで今後は、この予想の解決にも取り組む所存である。また同時に、$\mathbb{Z}[\beta^{-1}]$ 上の積を SRS 上で表現し、$\mathrm{Fin}(\beta)$ が積で閉じることの必要十分条件についても考察を行う。