今後の研究計画

高崎金久

以下のようなテーマについて研究を進める．

数え上げ幾何学　過去数年間 Gromov-Witten 不変量に関連する可積分階層について考えてきた．当初からの主要目標は Givental 理論を理解することだった．Givental 理論の主な成果の 1 つはボゾン Fock 空間による全種数 Gromov-Witten 不変量の作用素表示である．この表示は KP 階層や戸田階層の τ 函数の作用素表示を思わせるもので，特別な場合には実際に可積分階層や位相的漸化式と関係することが知られている．他方，もともとこの表示はフロベニウス多様体やシンプレクティック幾何学の量子化の観点から提案されたものだった．今回は後者の観点からこの表示の意味を考え直してみたい．

BCD 型 KP・戸田階層　KP 階層のさまざまな変種（B 型，C 型，D 型に大別される）は 1980 年代初めに KP 階層（A 型に相当する）が登場してまもなく導入され，長年にわたって基礎と応用の両面が研究されてきた．たとえば，通常の KP・戸田階層と同様に，これらの変種の KP 階層もランダム行列模型や直交多項式系に応用された．最近では数え上げ幾何学，特に Riemann 球面の Hurwitz 数に関連して，B 型 KP 階層に対する関心が高まっている．2 変数擬微分作用素による Lax 表示などの興味深い試みも登場している．他方，戸田階層についてもこのような変種は 1980 年代の登場当初から知られていたが，最近 Zabrodin と Krichever によって新しい型の戸田階層が見出されている．その位置付けにはまだ未解明の部分がある．

位相的弦理論と漸近解析　最近 M. Alim らは resolved conifold（特殊な 3 次元トーリック Calabi-Yau 多様体）の上の位相的弦理論に対して Borel 総和法や完全 WKB 解析からのアプローチを報告した．これは Dolaldson-Thomas 不変量の BPS 構造に関する Bridgeland の Riemann-Hilbert 問題を物理学者の観点から見直す試みのようである．これらの研究は先行する Kashaev らの量子ダイログ函数の研究の延長上にあり，岩木，小池，竹井による超幾何方程式の τ 函数の研究とも関連している．これらの研究を踏まえて，いわゆる strip geometry への一般化や等モノドロミー変形の考え方の導入を試みたい．

グラスマン多様体と境界測定　2006 年頃 Postnikov は境界測定の概念を用いて実グラスマン多様体の全非負部分の胞体分割を構成した．境界測定はある種の重み付きグラフを経路和やマッチング和によってグラスマン多様体の点に対応させる写像である．Postnikov は胞体分割とさまざまな組合せ論的概念との関係も指摘している．境界測定とそれに関連する組合せ論的概念はその後 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の散乱振幅の記述などに応用されている．これらの研究は数学的に興味深い多くの題材を提供しており，ツイスター理論，量子コホモロジー，超幾何函数などとの関連も期待される．