左不変計量の研究

Lie 群 G に対し, G 上の左不変リーマン計量のなす空間を $\mathcal{M}_L(G)$ であらわす．作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_L(G)$ において, 左不変リーマン計量 $\langle , \rangle \in \mathcal{M}_L(G)$ を通る軌道が孤立軌道ならば, $\langle , \rangle$ は Ricci soliton であることをこれまでの研究で示している．

Ricci soliton とは Ricci flow 方程式において自己相似解を与える計量である．作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_L(G)$ において孤立軌道を与える左不変計量 $\langle , \rangle \in \mathcal{M}_L(G)$ は Ricci flow に限らず, 様々な計量発展方程式に対して同時に自己相似解を与える可能性があり, 興味深い対象であることが近年分かった．よって, 以下のようにさらに掘り下げて研究したいと考えている．

- $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_L(G)$ において孤立軌道を与える Riemannian Lie 群 $(G, \langle , \rangle)$ のさらなる例を見付けたい．もし見付かれば, 計量発展方程式の自己相似解の研究に良い具体例を提供できる可能性がある．まずは自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ が比較的綺麗な 2-step べき零 Lie 群から例を探したい．
- 最終的には, $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(G) \curvearrowright \mathcal{M}_L(G)$ が孤立軌道をもつような Lie 群 G を分類を目指したい．generalize Alekseevskii 予想が解決されたことにより, Lie 群 G が左不変な Ricci soliton を許容するならば, G は可解 Lie 群, もしくコンパクト Lie 群と可換 Lie 群の直積に (等長的に) なることが分かった．$\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{Aut}(G)$-軌道が孤立軌道になるための障害をいくつか発見したので, それらを用いて, 孤立軌道を許容するような可解 Lie 群 G を決定したい．

arid submanifold の研究

これまでの研究で, 私は孤立軌道のエッセンスを, arid submanifold として, 軌道とは限らない一般の部分多様体に一般化した．今後 arid submanifold に関する研究を (i) 等質なケース, (ii) 非等質なケースに分けて行ないたい．

(i) 等質な arid submanifold はすべて然るべき等長作用の孤立軌道として実現できる．孤立軌道の 1 つのよい具体例が, 完備連結リーマン多様体への余等質性 1 等長作用の非主軌道である．そのような軌道は

$$\text{(full) slice 表現が法空間の単位球に推移的に作用する等質部分多様体} \qquad (\star)$$

として特徴付けられる．まずは, リーマン対称空間内の $(\star)$ を満たす等質部分多様体の分類を目指したい．空間形への余等質性 1 作用は良く分かっているから, まず空間形内の $(\star)$ を満たす等質部分多様体を分類し, その結果を観察しつつ, 一般のリーマン対称空間のケースを考える．

(ii) 等質リーマン多様体内の完備非等質な arid submanifold の例は知られていないと思われる．非等質な部分多様体の中でも, 特に扱いやすいものとして, 球面内の (非等質な) 等径超曲面が挙げられる．まずは球面内の等径超曲面の focal submanifold が arid submanifold になるかどうかを調べてみたい．