M. Khovanov は Jones 多項式を精密化するホモロジカル結び目不変量を構成した. Jones 多項式は量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と 2 次元既約表現を使用して構成した結び目量子不変量であることは良く知られている事実である. この事実から次の問題を解くことに取り組んできた.

他の結び目量子不変量を精密化するホモロジカル結び目不変量を構成できるか?

また特別な冪根のパラメータに付随する量子群から構成される結び目不変量は 3 次元多様体の不変量に拡張できることが知られている. この事実から次の問題にも取り組んできた.

問 2: **3 次元多様体のホモロジカル不変量を構成できるか?**

$$
\begin{tikzcd}
& \bigoplus \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_n)}(\wedge^{\underline{i}}, \wedge^{\underline{j}}) \arrow[d, squiggly, "\substack{\text{Yonezawa}\\ \text{[Doctoral thesis]}}"'] & U_q(\mathfrak{gl}_m) \arrow[l, "\gamma_m^n"'] \arrow[r, "\gamma_m"] \arrow[d, squiggly, "\substack{\text{Khovanov-Lauda,}\\ \text{Rouquier}}"] & \bigoplus \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(S^{\underline{i}}, S^{\underline{j}}) \arrow[d, dotted, squiggly, "\substack{\text{Khovanov-Lauda-}\\ \text{Sussan-Yonezawa}}"] \\
\substack{\text{Link invariant}\\ CKh(q,t,s)} & \mathrm{HMF}_m^n \arrow[l, Leftarrow] & \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m) \arrow[l, "\Gamma_m^n", "\text{Mackaay-Yonezawa}"'] \arrow[r, "\Gamma_m", "\substack{\text{Khovanov-Lauda-}\\ \text{Sussan-Yonezawa}}"'] & \mathrm{Bim}(m,k)
\end{tikzcd}
$$

(1) 論文 "Quantum $(\mathfrak{sl}_n, \wedge V_n)$ link invariant and matrix factorizations" の要約: Khovanov と Rozansky は, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ と n 次元既約表現から得られる結び目不変量を精密化する結び目のホモロジカル不変量を構成した. この論文で, Khovanov–Rozansky の理論を一般化し, $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ とその基本表現を使用して構成した結び目不変量 $CJ_n(q)$ を精密化する結び目不変量 $CKh(q,t,s)$ を定義した. (上図の青字の研究). $CJ_n(q) = CKh(q,-1,1)$ として復元する.

(2) 論文 "$\mathfrak{sl}_N$-Web categories and categorified skew Howe duality" の要約: 量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の圏化 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m)$ から行列因子化の圏 HMF_n^m への関手 $\Gamma_m^n : \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m) \to \mathrm{HMF}_m^n$ を構成した (上図の左下緑関手), この関手を用いて, 圏 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m)$ 上の組紐群の作用から $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ とその基本表現から得られる結び目不変量を精密化するホモロジカル不変量が構成できる.

(3) 論文 "Braid group actions from categorical symmetric Howe duality on deformed Webster algebras" の要約: 変形 Webster 代数 $W(\mathbf{s}, k)$ を定義し, 圏 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_m)$ から $W(\mathbf{s}, k)$ の両側加群圏 $\mathrm{Bim}(m,k)$ への関手 Γ_m を構成した (上図の右下オレンジ関手). この関手を用いて, 組紐群の作用を両側加群圏 $\mathrm{Bim}(m,k)$ 上に構成した.

(4) 論文 "A braid group action on a p-DG homotopy category" の要約: 圏に p-DG 構造を導入することで冪根の圏化のアイデアが Khovanov によって提案されたこの論文では, 両側加群圏 $\mathrm{Bim}(m,k)$ 上に p-DG 構造を定義し、この p-DG 構造と整合性を持つ組紐群の作用を $\mathrm{Bim}(m,k)$ に定義した.