

今後の研究計画

吉田 はん

2003年, G. Perelman によって幾何化予想が解決され, 3次元多様体は一意的な幾何構造を持つことが証明された. 双曲構造は, この幾何構造のうちで主要な位置を占めると考えられている. 3次元多様体の性質を研究する上でも, 双曲構造を考えることは有用である.

2つの双曲3次元多様体または軌道体(特異点があるもの) M_1, M_2 が共通の有限被覆空間を持つとき, M_1 と M_2 は通約可能 (**commensurable**) であるという. ‘通約可能’ という関係は同値関係になる. 以下の基本的な問題が考えられる.

問題 1 与えられた二つの双曲3次元多様体, 軌道体が通約可能であるかどうか判定する方法を見つけよ.

2つの数論的雙曲3次元多様体(代数的に定義されたもの)が通約可能かどうかは簡単にわかるので, 非数論的なものだけを考えればよい.

非数論的雙曲3次元多様体 M に対して commensurator 軌道体 $C(M)$ という M と通約可能な雙曲3次元多様体, 軌道体で体積が最小のものが存在することが証明されていて, 完全通約可能性類不変量となる.

非コンパクト雙曲3次元多様体に対しては, Epstein-Penner 分割と言われる, ある理想的多面体分割を用いて $C(M)$ を求めることができる.

上記の問題1は以下のようになる.

問題 2 与えられたコンパクト非数論的雙曲3次元多様体 M の commensurator 軌道体 $C(M)$ を決定せよ.

この問題に対して応募者は, 三角柱やロベル多面体と呼ばれるコンパクト多面体の各面に関する鏡映変換で生成される非数論的コクセター群の commensurators を決定した. 手法は面角の情報だけで簡単に計算できるものであり, 他の多くのコクセター群についても同様の commensurator を計算できると見込まれる.

今後は一般のコンパクト雙曲3次元多様体についても同様の計算方法がないか調べて, 問題2の完全解決を目指していきたい.

この問題を解いていくことで以下のような応用が見込まれる.

(1) 一般に雙曲3次元多様体が数論的かどうかを調べるには代数的な手法を用いて複雑な計算をしなければならないが, 上記の commensurator を計算する幾何学的手法を用いて簡単に数論的であると証明できるものがあると思われる.

(2) 雙曲3次元軌道体で体積が最小のもの, 2番目に小さいものは決定されているが数論的である. 非数論的雙曲3次元多様体の commensurator 軌道体というのは体積が小さいものなので, 多くの例を計算することで, 非数論的雙曲3次元軌道体の体積を決定するのに役立つと思われる.