研究成果

吉岡礼治

近年の研究テーマのうち、2d/4d 対応とテンソル模型について以下記述する。

• 2d/4d 対応と irregular 極限

2d/4d 対応では、2 次元共形場理論 (CFT) の共形ブロックと 4 次元 $su(n)$ 超対称ゲージ理論のインスタントン分配関数が等価であると主張される。

ゲージ理論側において、本来の 2d/4d 対応では物質場の数が $N_f = 2n$ であるとされるが、物質場の質量無限大極限において、物質場の自由度が decouple し、$N_f < 2n$ の理論へと移行する。CFT 側においては、これと対応するものは irregular 共形ブロックとして知られている。一方、元々の共形ブロックと等価な β 変形行列模型は、irregular 極限において、log 型ポテンシャルを持つユニタリー行列模型へと変形する。これまでの研究は $n = 2$ にほぼ限定されており、一般の n、即ち多行列模型における irregular 極限はほとんど注目されていなかった。そこで、一般の n への拡張を行い、$N_f = 2n-1,\ 2n-2$ への irregular 極限の手法を確立させた。得られた $N_f = 2n-2$ 模型において、ゲージ群の Dynkin 図に基づく最大離散対称性を実現する物質場の質量関係式を得た。この関係式により与えられるパラメータ空間の集合が、対応する Seiberg-Witten 曲線を最大限縮退させることを示した。

上記の log 型ポテンシャル付きのユニタリー行列模型 ($n = 2,\ N_f = 2,\ \beta = 1$) では、適切な 2 重スケール極限におけるストリング方程式として、Painlevé II 方程式が現れる。この方程式の解は理論の自由エネルギーと関係する。この解における非摂動部分 z を調べ、自由エネルギー積分の境界点において

$$z \approx \exp\left(-\frac{4}{3}\frac{1}{\kappa}\right) \tag{1}$$

という振舞いをすることを明らかにした。ここで κ は結合定数に対応する。

一方、上記の量は固有値の海から一つだけを有効ポテンシャルの極大値に持ち上げるときの仕事を調べることで、行列模型の直接の計算によっても読み取ることができる。その結果が係数 4/3 も含めて完全に一致することを示した。また 2 重スケール極限にはいくつかの任意パラメータだけの自由度があるが、(1) はその影響を受けず、普遍性を持つことを確認した。

• テンソル模型

テンソル模型は長方行列模型の高いランクへの一般化として定義でき、近年、低次元 AdS/CFT 対応や量子重力との関連から注目されている。しかし通常の行列模型と比べて複雑で、模型に含まれるゲージ不変演算子 (Operator) が非自明な構造を持ち、行列模型において用いられる Virasoro 拘束式などの通常の手法がそのままでは適用できない などの困難がある。

テンソル模型の Operator について研究の進展として、異なるランクのテンソル模型間に次の Op/FD 対応が成り立つことを実証した。

$$\text{Operator (ランク } r) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Feynman Diagram （ランク } r-1)$$

この対応により、テンソル模型の全ての演算子が、1 つだけランクの低い模型の Feynman 図でラベル付けされることが判明した。さらにランク 3 の場合、この対応関係は dessin (d'enfant) と呼ばれるグラフとの 1 対 1 対応を含んだ Op/FD/dessin 対応となることも示した。ここで、dessin とは、2 次元曲面上に埋め込まれた、2 色の頂点とそれらを繋ぐ辺からなるグラフである。この対応を用いて、ランク 3 のテンソル模型のレベル 5 までの全て operator を、FD や dessin の性質、例えば頂点の数などにより分類した。また cut & join 演算など operator 上に作用する演算を、dessin の言葉で表し、図形的な操作としての解釈を確立した。