

これまでの研究成果のまとめ

原田 哲夫

論文「Klyachko's theorem in semi-finite von Neumann algebras」では Klyachko の定理の一部が von Neumann algebra 上の positive operator に対してまで拡張できることを示した。ここで Klyachko の定理とは $n \times n$ エルミート行列 A, B に対して、それぞれの固有値のリストと $A + B$ の固有値のリストの対応関係を膨大な不等式により表したものである。結果そのものは決して使い易いとはいいがたいが、30 年以上前から存在した問題が一応は解決したことになった。そののち、Klyachko の定理の掛け算版についても（つまり、 A, B と AB の固有値のリストの対応）、一部を「Multiplicative versions of Klyachko's Theorem in finite factors」で von Neumann algebra 上に拡張した。そのあと、凸関数や凹関数を含む作用素不等式の研究を始めた。 f が単調増加凸関数で x, y が 0 以上の実数のとき一般的に $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$ が成立する。この不等式（または、この不等式の類似）が行列、作用素に対しても成り立つかという問題は当然興味のあるものだったが、有限次元のときは、Ando, Zhan らによって Majorization 不等式の意味で正しいことが示された。私はこの Majorization 不等式を τ -measurable operator に対してまで拡張した。また、凸関数に関する不等式の研究では、次の Jensen の不等式は非常に重要である。

x, y が実数で f を $f(0) \leq 0$ である凸関数とする。実数 a が $|a| \leq 1$ を満たすならば

$$f(ax) \leq af(x)$$

この不等式の行列版は様々な形が存在する。比較的以前から知られているのが

$$\text{Tr}(f(a^*xa)) \leq \text{Tr}(a^*f(x)a)$$

のタイプのものである（ここで、 a は $\|a\| \leq 1$ を満たす行列で x はエルミート行列）。「On equality condition for trace Jensen inequality in semi-finite von Neumann algebras」では上の不等式の等号成立条件が $(a^*xa)^2 = a^*x^2a$ であることを示した。