

今後の研究計画（勝田 篤）

最近の preprint, An extension of the Floquet-Bloch theory to nilpotent groups and its applications, arXiv:2509.16848 の 11 Future directions に今後の研究方向を記しているが、その中で比較的实现可能と思われるものおよび今後の発展を期待したいものをいくつか例示したい。

- (1) **コンパクト負曲率多様体や双曲力学系の素閉軌道に関するべき零版 Chebotarev 密度定理** 数論における素数定理の幾何学的類似として負曲率多様体上の測地流における素閉測地線定理が成立することはよく知られている。さらに Dirichlet の算術級数定理やその一般化である Chebotarev 密度定理の幾何学版が数論の形式的類似を超えた離散無限群による拡大の場合も込めて考察されている。上記のプレプリントにおいてコンパクト双曲的リーマン面の場合のべき零拡大に関して結果が得られたが、これをより一般の変動負曲率多様体やより一般の Anosov 系等の双曲力学系に対して拡張したい。この場合、双曲的リーマン面の場合に用いられたラプラシアン等の調和解析の代わりに力学系的な方法が用いられるが、アーベル拡大の場合と対比しつつ議論すればおそらく目的は達成されと考えている。
- (2) **Abel 拡大からべき零拡大へ: いくつかの例** 通常の Floquet-Bloch 理論はアーベル拡大の場合のもので、物性物理学における基本的ツールの一つである。応用として、周期的楕円型作用素の Martin 境界の研究, Horocycle 流や Frame 流のアーベル拡大の研究, アーベル拡大に関する Louville-Riemann-Roch 等の結果が知られているがこのべき零拡大版への拡張を調べたい。
- (3) **より一般の離散群へ** さらに、べき零群より複雑な可解群や従順群の Floquet-Bloch 理論についても、軌道法, 相対反復積分等を用いて考察したい。3 次元可解リー群の格子である場合が最初の目標である。
- (4) **擬準同型, 変形リーマンヒルベルト, オパー (Oper)** ここまでの Chebotarev 型定理は、コンパクト多様体の基本群から Γ への全射準同型の存在を前提としていた。Sarnak は、代わりに end を持つ多様体の基本群から Z への擬準同型の存在という状況の密度定理を考察し、素閉軌道と end から決まる結び目との絡まり数との関連を調べた。この結果は Ghys の ICM 講演に刺激を受けたものであり、ここでは、三葉結び目, 絡まり数, 力学系の閉軌道, および数論での対象である Rademacher 記号, Dedekind eta 関数が見事に結び付けられていた。元の問題では、Hodge-de Rham の定理やそのべき零への拡張が重要な役割を果たすが、これは C^∞ 範疇での Riemann-Hilbert 問題 (与えられた基本群の表現に対し、それを monodromy 表現とする平坦接続を見つける問題) の解を与えたものである。ここでは「擬準同型はある種の離散的曲率と解釈でき、それを holonomy として実現する (平坦とは限らない) 接続を求める」(変形 Riemann-Hilbert 問題) という本研究の新観点から考察する。実際、上記 Rademacher 記号が離散曲率, Dedekind eta 関数の log が接続に対応すると考えられる。これらは、松坂-植木によりトーラス結び目の場合まで拡張されたが、さらなる発展を考察したい。この研究は量子 Riemann-Hilbert 問題, 幾何学的 Langlands 対応, Oper, Non-abelian Hodge 理論, 可積分系等のより広範なトピックへのつながりも期待できそうに思える。