(2) これまでの研究成果のまとめ

真瀬 真樹子

本研究の目的は代数的 $K3$ 曲面 (以下では単に $K3$ 曲面と呼ぶ) がシンプレクティック自己同型作用を持つとき, その代数幾何学的な構造を理解することである.

さて, X を $K3$ 曲面とし, 付随する至る所消えない正則 2-形式を ω_X と記す. このとき, X の自己同型 g がシンプレクティック (に作用する) とは 2-形式 ω_X 上に誘導された作用 g^* が自明な作用であることを言う.

1980 年に V.V.Nikulin は G が可換群である場合に, 14 個の同型な群に分類を行った. また, S.Mukai は 1988 年の研究において, 全ての有限なシンプレクティックな $K3$ 曲面の自己同型群が位数 23 の Mathieu 群の部分群であることを示した. 最終的に 1996 年に Z.Xiao により全ての有限なシンプレクティックな $K3$ 曲面の自己同型群は 81 種の群に分類されることが示された. 更に群の交換子群や他の重要な不変量も併せて与えられた.

曲面 X にシンプレクティックに作用する自己同型全体から成る有限群を G とする. 曲面 X への作用 G は商空間 X/G を定めるが, 商空間 X/G は高々単純特異点を有することが知られている. 更に, この商空間 X/G は $K3$ 曲面 (これを Y とおく) に双有理同値であることも知られている. 実際, Y は X/G の特異点を解消することにより得られ, その時得られる Y 上の例外因子 E は ADE 型格子の直和となっている.

例外因子 E の全ての成分のクラスで生成される格子を L_G とする.

今定めた格子 L_G は $K3$ 格子の部分格子であることは知られている. ここで $K3$ 格子とは, ユニモジュラーな偶格子であり符号 $(3, 19)$ を持つ格子 Λ_{K3} の事である. しかしながら L_G は Λ_{K3} の原始的な部分格子であるとは限らない. もし原始的であるならば $K3$ 曲面 Y の偏極が L_G で与えられることが理解できる. そうでないならば, 次の問題を考えたい: 格子 L_G を含むような, $K3$ 格子 Λ_{K3} の原始的な部分格子 $\tilde{L}_G$ は唯一つに定まるだろうか ?

この問題については特別な場合を扱った, 先行研究により部分的解決がなされている. そもそも, 各 G に付随した格子 L_G は 1996 年に Xiao により全て決定されている. シンプレクティックに作用する有限な自己同型群が可換群である場合は全ての場合において格子 L_G の原始的閉包格子 $\tilde{L}_G$ は唯一つに定まることが 1980 年に Nikulin により示された. また, 自己同型群が非可換であり, かつ, 単純群である場合には 2011 年の U.Whitcher による研究により, 解決された. しかし, この場合にその回答は必ずしも肯定的ではなかった.

以上の背景を踏まえて, 本研究では, 残っている全ての場合について問題の解決を試みている. 即ち, 群 G とそのアーベル化群 $Q := G/[G, G]$ のいずれも自明でない場合に問題に取り組む. 現在までのところ, 群 Q が位数 2 または 3 の巡回群であるならば, 格子 L_G の原始的閉包格子 $\tilde{L}_G$ は唯一つに定まる, という部分的な解決を得ることができた.