

$\beta > 1$ とする。Frougny と Solomyak は次の 3 つの有限性条件を提案した。

$$(F_1) \quad \mathbb{N} \subset \text{Fin}(\beta)$$

$$(PF) \quad \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] \subset \text{Fin}(\beta) \text{ where } \mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \beta^{-k} \mid a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

$$(F) \quad \mathbb{Z}[\beta^{-1}]_{\geq 0} \subset \text{Fin}(\beta) \text{ where } \mathbb{Z}[\beta^{-1}]_{\geq 0} = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \beta^{-k} \mid a_k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, \infty)$$

ここに $\text{Fin}(\beta)$ は有限ベータ展開をもつ非負数 x の全体である。 $\beta \in (F_1)$ なら、 β は Pisot 数と呼ばれる代数的整数となることが知られており、また β が代数的整数のときは $\mathbb{Z}[\beta] \subset \mathbb{Z}[\beta^{-1}]$ が成り立つため、 (PF) は $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\beta^{-1}] = \text{Fin}(\beta)$ と、 (F) は $\mathbb{Z}[\beta^{-1}]_{\geq 0} = \text{Fin}(\beta)$ と同値である。これらをまとめると次のようになる。

	β のクラス	$\text{Fin}(\beta)$ の代数構造	(F)となるための条件	(PF)となるための条件
(F_1)	Pisot 数	?	?	?
(PF)	Pisot 数	和・積に関して閉	$d_\beta(1)$ が有限	—
(F)	Pisot 数	和、積、差に関して閉	—	—

ただし、差に関して閉とは、 $x, y \in \text{Fin}(\beta)$ ($x < y$) なら $y - x \in \text{Fin}(\beta)$ となるときに言う。

表からも分かるように (F_1) については未だ詳しく分かっていない。しかし最近、私は $\beta \in (F_1) \setminus (PF)$ となる β を発見した。そこで今後、 (F_1) に関する性質について以下のテーマに取り組む所存である。

1. (F_1) の必要十分条件について

代数的整数 $\beta > 1$ の最小多項式を $x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1x - a_0$ とし、 $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ に対し τ を

$$\tau(\mathbf{l}) := (l_2, \dots, l_{d-1}, -[\lambda(\mathbf{l})])$$

$$\text{where } \lambda(\mathbf{l}) = \mathbf{l} \cdot (a_0\beta^{-1}, a_1\beta^{-1} + a_0\beta^{-2}, \dots, a_{d-2}\beta^{-1} + \cdots + a_0\beta^{-d+1})$$

と定義する。ここに $\cdot$ は内積である。このとき、 τ はベータ変換 T に対応する $\mathbb{Z}^{d-1}$ 上の変換で shift radix system (SRS) と呼ばれる。特に $\{\lambda\}(\mathbf{l}) := \{\lambda(\mathbf{l})\}$ とすると、 τ は可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{d-1} & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{Z}^{d-1} \\ \{\lambda\} \downarrow & & \downarrow \{\lambda\} \\ \text{Fin}(\beta) \cap [0, 1) & \xrightarrow{T} & \text{Fin}(\beta) \cap [0, 1) \end{array}$$

を満たす。よって $F_\beta := \{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid \exists k \geq 0; \tau^k(\mathbf{l}) = \mathbf{0}\}$ とおくと、 $\{\lambda\}(F_\beta) \subset \text{Fin}(\beta) \cap [0, 1)$ が成り立つ。次に

$$Q_\beta := \{\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid \exists \{l_n\}_{n=1}^\infty \text{ s.t. } l_N = \mathbf{l}, l_{n+1} \in \{\tau(l_n), \tau^*(l_n)\} \& l_1 = \mathbf{e}\}$$

$$\text{where } \mathbf{e} := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{Z}^{d-1} \& \tau^*(\mathbf{l}) := -\tau(-\mathbf{l})$$

とおく。このとき、 β が Pisot 数なら Q_β は有限集合となることが知られている。最近の研究で、私は、

$$\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta \& \left\{ \sum_{n=1}^r a_n \tau^n(\mathbf{e}) \mid a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \cap [-\delta, \delta]^{d-1} \subset F_\beta$$

$$\text{where } P_\beta := \{\mathbf{l} \in Q_\beta \mid \exists k > 0; \tau_\beta^k(\mathbf{l}) = \mathbf{l}\} \& \delta := \max\{|\lambda_j| \mid (l_1, l_2, \dots, l_{d-1}) \in P_\beta\}$$

が (F_1) の十分条件となることを発見した。そこで現在、私はこの条件が $\beta \in (F_1) \setminus (PF)$ であるための β の必要十分条件ではないかと予想しており、今後はこの予想の解決に向けて研究を続けるつもりである。

2. β が (F_1) を満たすときの $\text{Fin}(\beta)$ の代数構造について

上の表からも分かるように、 $\beta \in (F_1)$ であるときの $\text{Fin}(\beta)$ の代数構造は分かっていない。しかし、私は $\beta \in (F_1)$ のときに $\text{Fin}(\beta)$ が積で閉じるのではないかと予想している。そこで今後は、この予想の解決にも取り組む所存である。また同時に、 $\mathbb{Z}[\beta^{-1}]$ 上の積を SRS 上で表現し、 $\text{Fin}(\beta)$ が積で閉じることの必要十分条件についても考察を行う。