

今後の研究計画（足立 俊明）

測地線の性質からリーマン多様体の形状を考察するという方法は、微分幾何学における1つの代表的な手法である。では考察対象の曲線族を広げたら多様体の性質をより多く得ることができるかと考えるのも自然な発想であり、主として部分多様体の研究場面で利用されてきた。申請者は、幾何構造を持つリーマン多様体の性質を、構造に付随した曲線族で単位接束上の力学系を誘導するものを利用して考察してきた。今後もこの観点から研究を継続する予定である。以下に、現在興味を抱いている内容を挙げておく。

ケーラー磁場と佐々木磁場の回転成分 リーマン多様体上の2次形式として与えられる磁場の下での軌道は、速度ベクトルと磁力が働く加速度ベクトルとで定まっており、ケーラー形式の定数倍であるケーラー磁場の場合、これらのベクトルが接空間の複素一次元部分空間を構成することから、全実方向には影響を与えないと考えるのが妥当のように思われる。しかし軌道の変分である磁性ヤコビ場を考えると、磁力の半分の力が全実方向に逃げるように見える。軌道を用いてリーマン多様体の性質を調べる上で、磁力が働く方向以外への影響の考慮は種々の場面で重要になっており、軌道と測地線と組み合わせることで捉えられないかと考えている。近視眼的には、軌道の具体的な表示を与えることができる非平坦複素空間形内のエータ全臍的実超曲面上の概接触計量構造が定める佐々木磁場の軌道について、その様子を特性ベクトル場方向と直交方向とに分解することで、回転成分がどのように現れるかその様子的一端を調べる。一方ケーラー磁場に対しては、全実円に沿った軌道の変分が重要になると考えられる。軌道ハープと組み合わせることで複素空間形の特徴付けに向けて考察を進めたい。

ケーラーグラフのL関数 主辺と補助辺を持つケーラーグラフは、磁場を持つリーマン多様体の離散モデルの1種であると申請者は捉えている。ケーラーグラフにおいて、2色彩道によるランダム・ウォークの生成作用素は、主辺による隣接作用素と補助辺による推移作用素との合成である確率的隣接作用素になる。ケーラーグラフが正則で2つの作用素が可換になる場合には、2色彩道に同値関係を導入することで伊原型ゼータ関数を定義することができ、確率的隣接作用素との関係も分かっている。可換性についてリーマン多様体で関連するのは束構造を持つ場合ではないかと思われ、佐々木磁場と何らかの対応関係を見いだして考察を進めたい。通常グラフの伊原型ゼータ関数については非正則な場合にも様子が分かっており、ケーラーグラフへの拡張ができれば、離散モデルとしての位置づけがより明らかになるはずである。またL関数を考えるにあたってグラフへの群作用が必要である。通常グラフでは複体としての基本群であるが、ケーラーグラフでは同値関係から誘導される商群になる。この幾何学的な意味づけが全く分かっておらず、連続モデルとの対応を調べることは重要である。

アダマール・ケーラー多様体の理想境界と軌道 ケーラー多様体に戻ると、非正曲率である場合に、磁力が多様体の断面曲率に比べて小さい場合には軌道が作る磁性流が双曲的になり、大きい場合には円的になることから、その狭間であるホロサイクルが出現する状況が多様体の様子を端的に表現していると想像される。ここでホロサイクルとは、軌道が正負両方向に非有界でありその無限遠点が一点になることとしている。この無限遠点に行く測地線が定めるホロ球面との関連で複素双曲空間成分との関係が期待される。ただ双曲的な場合でも、軌道の長さを考えたのでは、測地線と異なり三角不等式的な性質が成立しないことから単純な内容とは思われないが、アダマール多様体の測地線の幾何学としてユークリッド空間を捉える結果に対応しているはずである。前述の全実円に対する骨冊とも関連しており、これまでの考察を円ハープに拡張して考察を進める。