今後の研究計画

綾野孝則

アーベル関数の還元公式を得るには，2 つの代数曲線の間に射が定義できるとき，それらの代数曲線の定義方程式と射の定義式が具体的に書けていることが必要です．[Katsura, Takashima 2024] では，自然数 g に対して，bielliptic な種数 $2g$ の超楕円曲線の定義方程式が具体的に決定されています．私は，この結果を応用して，bielliptic な種数 $2g$ の超楕円曲線に付随するアーベル関数を種数 g の超楕円曲線に付随するアーベル関数で記述します．これにより，最も簡単なアーベル関数である楕円関数で表現できるアーベル関数の列が得られます．[Kuhn 1988] では，ある楕円曲線への次数 3 の射が存在する種数 2 の超楕円曲線の定義方程式が決定されています．[Belokolos, Enolskii 2001] では，ある楕円曲線への次数 4 の射が存在する種数 2 の超楕円曲線の定義方程式が決定されています．私は，これらの結果を応用して，上記の 2 種類の種数 2 の超楕円曲線に付随するアーベル関数を楕円関数で記述します．

$$y^2 = x^{2g+1} + \lambda_2 x^{2g} + \cdots + \lambda_{4g} x + \lambda_{4g+2}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

で定義される無限遠点が 1 つの種数 g の超楕円曲線を V_g とします．$\sigma(u_1, u_3, \ldots, u_{2g-1})$ を V_g に付随するシグマ関数とします．$\sigma_i = \partial_{u_i}\sigma$，$\wp_{i,j} = -\partial_{u_i}\partial_{u_j}\log\sigma$ とします．σ_3/σ_1 を σ の零点集合上で考えた関数を F とします．私は，$\lambda_{4g} = \lambda_{4g+2} = 0$ とすると，F は V_{g-1} に付随する $\wp_{1,1}$ と一致することを示しました．$\wp_{1,1}$ は KdV 階層を満たすので，F は KdV 階層を $\lambda_{4g}, \lambda_{4g+2}$ で変形した微分方程式系を満たすと考えられます．[Buchstaber et al. 1997] で導出された $\wp_{i,j}$ の微分関係式 ($\wp_{i,j}$ の 2 階の偏微分を $\wp_{k,l}$ で表す式) を用いて，F が満たす微分方程式系を明示的に書きます．これは，論文リスト 1–9 の論文の結果 $(g = 3)$ を一般の種数 g の場合に拡張することです．

[Tian et al. 2013] では，種数 $2, 3$ の場合に，数理物理で重要な breaking ソリトン方程式の解が無限遠点が 1 つの超楕円曲線に付随するアーベル関数を用いて構成されました．この結果は，[Baker 1903] で得られた種数 2 と 3 の場合のアーベル関数の微分関係式を用いて示されました．一方，[Buchstaber et al. 1997] において，この微分関係式は一般の種数の場合に拡張されました．私は，[Buchstaber et al. 1997] の結果を応用して，一般の種数の場合に，breaking ソリトン方程式の解をアーベル関数で構成します．

無限遠点が 1 つの種数 g の超楕円曲線に付随するアーベル関数 $\wp_{k,l}(k, l = 1, 3, \ldots, 2g-1)$ は，これまでに多くの研究が行われ，使いやすい理論が整備されています．一方，Baker により構成された，無限遠点が 2 つの種数 g の超楕円曲線

$$y^2 = \nu_0 x^{2g+2} + \nu_2 x^{2g+1} + \cdots + \nu_{4g+2} x + \nu_{4g+4}, \quad \nu_i \in \mathbb{C}, \quad \nu_0 \neq 0$$

に付随するアーベル関数 $\mathcal{P}_{i,j}(i, j = 2, 4, \ldots, 2g)$ については，あまり手が付けられていません．私は，論文リスト 1–3 の論文において，$\mathcal{P}_{i,j}$ と $\wp_{k,l}$ の間の関係を明らかにしました (Buchstaber 氏との共同研究)．今後は，[Buchstaber et al. 1997] において導出された $\wp_{k,l}$ の微分関係式を用いて，$\mathcal{P}_{i,j}$ の微分関係式を導出します．私は，論文リスト 1–3 の論文において，$\nu_{4g+4} = 0$，$\nu_{4g+2} = 1$ とすると，$\mathcal{P}_{2g+2-2m,2g+2-2n}$ は $\wp_{2m-1,2n-1}$ と一致することを示しました $(1 \leq m, n \leq g)$．$\wp_{k,l}$ は KdV 階層，sine-Gordon 方程式，Veselov-Novikov 方程式を満たすので，$\mathcal{P}_{i,j}$ はこれらの方程式を 2 つのパラメータ ν_{4g+2}, ν_{4g+4} で変形した微分方程式を満たすと考えられます．この微分方程式を明示的に書きます．