これまでの研究成果

綾野孝則

三角関数は 2π を周期に持つ関数です．楕円関数は 2 つの周期を持つ複素 1 変数関数であり，三角関数の自然な一般化と見なせます．アーベル関数は 2 つ以上の周期を持つ複素多変数関数であり，三角関数から楕円関数という方向でのさらなる一般化を経たものです．三角関数や楕円関数はこれまでに多くの研究が行われ，使いやすい理論が構築され，数学や科学の発展に貢献してきました．一方，1990 年代から，可積分系や暗号の研究において，一般のアーベル関数の知見が要求される状況にあり，私の関わるアーベル関数論の研究は，三角関数や楕円関数の理論を一般のアーベル関数に拡張することを目指しています．

代数曲線に付随するリーマンのテータ関数は代数曲線の標準ホモロジー基底に依存します．しかし，一般の代数曲線において，標準ホモロジー基底を具体的に構成することは難しい問題です．具体的な代数方程式を用いて定義される代数曲線が与えられたとき，テータ関数をうまく調整して，標準ホモロジー基底に依存せず，代数曲線の定義方程式の係数のみから代数的に定まる関数 (シグマ関数) を構成せよという問題が 19 世紀に F. Klein により提示されました．無限遠点が 1 つの超楕円曲線の場合は，Klein 自身により解決されました．無限遠点が 1 つの超楕円曲線を含む (n, s) 曲線と呼ばれる平面曲線の場合は，Buchstaber, Enolskii, Leykin や中屋敷厚氏により解決されました．私は，論文リスト 1–12 の論文で，(n, s) 曲線を含むテレスコピック曲線に対してこの問題を解決しました．また，論文リスト 1–2 の論文で，無限遠点が 2 つの超楕円曲線に対してこの問題を解決しました (Buchstaber 氏との共同研究)．シグマ関数は代数曲線の定義方程式の係数だけから代数的に定まるため，シグマ関数を用いて微分方程式の解を構成できれば，代数曲線の定義方程式の係数を変化させて曲線を退化させたときの解の振る舞いが調べやすくなります．大西良博氏により，(n, s) 曲線に付随するシグマ関数のべき級数展開の係数は，曲線の定義方程式の係数の整数係数の多項式になるという性質 (フルビッツ整性) が示されました．私は，論文リスト 1–4 の論文で，シグマ関数のフルビッツ整性をテレスコピック曲線の場合に一般化しました．楕円曲線，種数 2 の超楕円曲線に対しては，フルビッツ整性を用いて，p 進体上でシグマ関数が定義され，数論に応用されています．論文リスト 1–4 の論文の結果は，この研究のさらなる発展に貢献できると考えています．

種数の高い代数曲線のアーベル関数を種数の低い代数曲線のアーベル関数で記述する問題 (アーベル関数の還元) を考察しました．ある楕円曲線への次数 2 の射が存在する代数曲線を bielliptic といいます．私は，論文リスト 1–6 の論文で，bielliptic な種数 2 の超楕円曲線のアーベル関数を楕円関数で記述しました (Buchstaber 氏との共同研究)．また，論文リスト 1–1 の論文で，bielliptic な種数 3 の超楕円曲線のアーベル関数を楕円関数と種数 2 の曲線のアーベル関数で記述しました．松谷茂樹氏や Julia Bernatska 氏により，KdV 方程式のアーベル関数解の可視化や数値計算の研究が行われています．Mathematica などの数式処理ソフトには楕円関数の計算に関する機能が備わっているので，種数の高いアーベル関数を楕円関数 (種数 1 のアーベル関数) で記述できれば，アーベル関数の数値を計算しやすくなります．本研究の結果は，微分方程式のアーベル関数解の可視化や数値計算の研究に貢献できると考えております．