

研究成果

江澤 樹 (えざわ たつき)

e-mail: m14006q@math.nagoya-u.ac.jp

これまで、Hilbert 空間や Banach 空間で既に多くの不動点の近似定理が知られている。それらを CAT 空間において妥当と思われる仮定の元で同様に成立するかを検証する形の研究を行ってきた。Hadamard 空間 (完備 CAT(0) 空間) は Hilbert 空間の、Banach 空間とは別の方向への一般化であるから、定理としてもある種の一般化を生む。例えば、[1] がその典型を与える。[1] は完備 CAT(1) 空間において、有限個の写像 (妥当な仮定を設ける) が与えられた時に、その凸結合と合成から W -写像構成を用い、反復を多重化し、共通不動点の近似定理を得ている。これは Banach 空間において、有限個の写像の共通不動点の近似定理を得ている [3] と完備 CAT(1) 空間において 1 つの写像の不動点の近似定理を得ている [4] を発展させる形で行った研究結果である。各写像に対する仮定も良い具体例である *resolvent* や非拡大を含む形で証明ができています。また、[2] では、完備 CAT(1) 空間において [1] における反復の多重化を収縮射影法や CQ 射影法と呼ばれている不動点の近似手法に対して、適用することで、既に Hilbert 空間でよく知られている定理を CAT(1) 空間における定理に発展させている。なお、[2] においては有限個の写像に対して、非拡大であるという仮定を設けている。これは Hilbert 空間や Banach 空間における既存の結果においては妥当な性質であるが、CAT(1) 空間においては非拡大写像の重要な例が知られていない。そこで、写像に対して、具体例を多く含む仮定 (例えば、強擬非拡大かつ Δ -demiclosed) のもとでの定理への発展が期待される。論文 [2] 内では触れておらず、未発表ではあるが、木村、高坂により定義された CAT(1) における *resolvent* (これは強擬非拡大かつ Δ -demiclosed という性質をもつ) ではその固有の性質も用いることで [2] の結果を証明することができている。

また、これからの研究に直接関係のある成果として、[5] についての精査がある。この [5] では Hadamard 空間において、uniformly continuous total asymptotically quasi nonexpansive と呼ばれている性質をもつ写像の族について、ある多重化を行った反復を考えることによって、共通不動点の近似定理を得ている。この結果について、

- (1) 空間を CAT(1) 空間で考える。
- (2) 多重化の方法を収縮射影法におきかえる。

といったことにより別の新しい結果に発展させる研究を行っていた。(1), (2) どちらの取り組みにおいても、問題としての妥当性については他の専門家との議論で確信を得ている。一方で、この [5] における証明は (1), (2) に取り組む上で、そのまま用いることができる式変形、不等式評価は少ない。とくに、写像についての仮定 uniformly continuous total asymptotically quasi nonexpansive は、CAT(1) 空間においては、具体例が見つからない、という意味で適切でない。今年度は、当初の問題とは異なるが、この [5] を上記 (1), (2) の意味で発展させることを考え、今まで、行ってきた CAT(1) 空間での研究や収縮射影法の扱いを実行できている。まだ、最終的な結果を得るには至っていないが、具体的な問題点も明らかになっており、その問題点を解決するための手法の候補となる結果もいくつかの文献から得ている。さらに、これらを元に、論文をまとめる準備も並行しておこなっている。

参考文献

- [1] T. Ezawa and Y. Kimura, Halpern iteration for a finite family of quasinonexpansive mappings on a complete geodesic space with curvature bounded above by one, *Linear and Nonlinear Analysis* 7 (2021), 141-155. arXiv:1911.07064.
- [2] T. Ezawa, Convergence to a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings on the unit sphere of a Hilbert space, arXiv:2002.04305.
- [3] S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications, in: B.N. Prasad birth centenary commemoration volume. *Indian J. Math.* 41 (3) (1999), 435-453.
- [4] Y. Kimura and K. Sato, Halpern iteration for strongly quasinonexpansive mappings on a geodesic space with curvature bounded above by one, *Fixed Point Theory Appl.* 2013 (2013), Article ID 7.
- [5] M. A. A. Khan and P. Cholamjiak, A multi-step approximant for fixed point problem and convex optimization problem in Hadamard spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, vol. 22, no. 3, 2020.