今後の研究計画

濱本直樹
email: s21254h@omu.ac.jp

論文 [2, 12, 3, 7] では、渦なし場やソレノイダル場のスカラーポテンシャルによる表現公式が本質的に重要な役割を果たし、それが Hardy 及び Rellich 不等式の最良定数の改良に関する最小化問題を解決可能にしている．この手法は他にも多くの Hardy 型関数不等式の解析に応用できる可能性がある．とくに、以下のトピックについての研究をより一層進めていきたい．

- ベクトル場に対する Hardy 型不等式両辺の積分量の差を評価する補正項は、最良定数の達成可能性について本質的な情報を含んでいる．この補正項を、ある意味で最良な形で得ることを 1 つの目標とする．
- これまでの研究で扱ってきた Hardy-Leray 不等式は L^2 型のみであったが、$p \neq 2$ に対する L^p 型の最良 Hardy-Leray 不等式についても、渦無しもしくはソレノイダル条件による最良定数の改良が考えられる．$p \neq 2$ の場合は従来の球面調和関数展開による方法が全く通用しないため、最良定数の計算は非常に難しいが、再配列理論の軸対称版を構築することから始めるアプローチを模索中である．
- これまでの研究では全空間上でのベクトル場を扱ってきたが、半空間上のベクトル場についても、トレース補正項付き Hardy-Leray 不等式が Kato の不等式として知られている．この不等式のテストベクトル場に渦無しもしくはソレノイダル条件を課せば最良定数がどのように変更されるのかを検討していきたい．
- Heisenberg 不確定性不等式についての論文 [5] の一般化として、制約条件付きベクトル場に対する Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式の最良定数の計算がすべての重み指数について可能かどうかを検討していきたい．
- 領域を Euclid 空間ではなく曲率を持つ空間 (より正確には定曲率空間) に変更した場合に、ソレノイダルもしくは渦なし場に対する関数不等式の最良定数がどのような形になるのかに興味があり、それを解明していきたい．

不等式の最良性はその Euler-Lagrange 方程式と密接に関係しているため、現行の研究を Navier-Stokes 方程式のような偏微分方程式論に応用する可能性についても模索する．ソレノイダル条件による不等式の改良によって弱解の存在を導いた Leray の方程式論について、何らかの新展開が得られることが期待できる．