これまでの研究結果

濱本直樹
email: s21254h@omu.ac.jp

Hardy 型不等式や不確定性原理不等式のような関数不等式において、テスト関数をベクトル値関数とした場合の制約条件が最良定数の値に与える影響について調べている．G. H. Hardy が発見した 1 次元スカラー場に対する Hardy 不等式は、J. Leray の Navier-Stokes 方程式論において高次元のベクトル場に対する不等式へと拡張された．今日、その不等式は様々な方面に応用されている．本研究が扱う主なテーマは、関数不等式のベクトル値試行関数に渦無しもしくはソレノイダルなどの制約条件を課すことによって生じ得る最良定数の値の変更についてである．変更された最良値を求める問題は 2007 年に Costin-Maz'ya によって提起されたものであり、彼らは軸対称ソレノイダル場に対する Hardy 不等式の新しい最良定数を導出した．本研究では、彼らが使った軸対称条件を仮定せずに同じ最良定数を導出する計算方法を試みたり、別の形の不等式についてどのようなことが言えるのかといった問題に取り組んでいる．実際、これまでの研究では以下のような結果が得られた．

ソレノイダル場に対する最良 Hardy-Leray 不等式

3 次元ソレノイダル場については、テストベクトル場の方位角成分のみに軸対称性を課すだけで Costin-Maz'ya と同じ最良定数が得られることを高橋太教授との共同研究 [9] で確かめた．さらに、この結果を論文 [2] と [7] では対称性を全く仮定せずに一般次元のソレノイダル場にまで拡張し、論文 [4] では重み指数を含む最良定数の表示を簡素化した．

ソレノイダル場に対する Rellich-Leray 不等式

Hardy 不等式の 2 階版として、論文 [1] では軸対称ソレノイダル場に対する重み付き Rellich 不等式の最良定数を軸対称ベクトル場の厳密な特徴付けを与えることによって導出した．さらに、この結果は論文 [3] において一般のソレノイダル場に対して拡張され、最良定数の達成不可能性も示された．

渦無し場に対する最良 Hardy-Leray および Rellich-Leray 不等式

Costin-Maz'ya の 2 次元の結果を受けて、高橋太教授との共同研究 [11] では高次元渦無し場に対する重み付き Hardy 及び Rellich 不等式の最良定数を導出した．又、共著論文 [12] では先行論文で導出された最良定数の達成不可能性を補正項の評価によって証明した．臨界の場合については、2 次元渦無し場に対する対数型重み付き Hardy 不等式の最良定数が 制約条件無しの場合の最良定数に一致することを論文 [10] で確かめた．

渦なし又はソレノイダル場に対する Rellich-Hardy 不等式

Tertikas-Zographopoulos によって発見された Rellich-Hardy 不等式は Hardy 不等式と Rellich 不等式の中間に相当するが、この不等式ついても論文 [13, 8] において渦なし又はソレノイダル場に対する最良定数をすべてのべき乗型重み付き不等式について計算した．

ソレノイダル場に対する不確定性原理不等式

スカラー場に対する Heisenberg の不確定性原理はその最良定数とともに良く知られている．論文 [5, 6] ではソレノイダル場に対する同不等式の最良定数を導出し、それが達成可能であることを示した．さらに達成関数のプロファイルの完全な記述を得ることも出来た．