今後の研究計画（応募者名：濱中翔太）

- <u>Syntheticな曲率の有界性とリッチフロー</u>：応募者は，スカラー曲率下限に関する種々の概剛性定理に関連した，「（全）スカラー曲率下限の弱い意味での定義」及び「それを扱うために適当な位相」に興味があり研究している．[9]で応募者自身によって得られた新たなスカラー曲率や全スカラー曲率の下からの有界性の定義について，「他の文脈で定義されたものとの関係」及び「（全）スカラー曲率に関する種々の概剛性定理を扱う際にどれだけ有効なのか」を具体例の構成などを通じて調べる．ある弱い意味でスカラー曲率が（0で）下から抑えられた滑らかではない計量の例[1]がSormani–Tian–Wangらによって構成された([17])．特にこの具体例について，それがBurkhardt–Guimによるリッチ-デタークフローを用いた意味での定義([3])を満たすものなのか否かを調べたい．また，[10]に関連して，スカラー曲率や全スカラー曲率の**上からの**有界性の弱い意味の特徴付けに関する研究も行いたいと考えている．因みに，スカラー曲率の**下からの**有界性については様々な研究がある一方，このような**上からの**有界性の弱い意味での特徴付けに関する研究は応募者の知る限り行われていない．
- <u>4次元閉多様体上のリッチフロー解析</u>：4次元多様体のトポロジーに対してはこれまでゲージ理論的なアプローチが多く成功を収めてきた．一方で，Bamlerはリッチフローを用いた幾何解析的手法の有効性を示唆している([2])．応募者は，この方向で4次元トポロジーへアプローチをしていきたいと考えおり，まずは「スカラー曲率のある種の有界性」の下でのRFの振舞いを解明することを目標に研究を行う．
- <u>重み付きリーマン多様体上の幾何解析</u>：リーマン多様体の計量に加えて，ポテンシャル（関数）による‘重み’が定めるある測度を備えた空間を重み付きリーマン多様体（weighted Riemannian manifold或いはsmooth metric measure space）という．このような空間は，リッチフロー理論，リッチ極限空間，また，高エネルギー物理のある文脈においても現れることが知られている．特に最近Baldauf–Ozuch [1]によって，重み付きAE（漸近的ユークリッド）多様体に対して，重み付きのADM質量が定義され，特に重み付きスピンAE多様体（の重み付きのADM質量）に対するある正質量定理が示された．更にChu-Zhu [7]によって，３次元以上７次元以下の（スピンとは限らない）重み付きAE多様体に対する正質量定理が示された．[2]一方，重み付きでないADM質量のある幾何学的流に沿った挙動も幾つか既に研究されている．Dai-Ma [8], Li [15]によるリッチフローの下でのADM質量の挙動の研究，及びCheng-Zhu [6], Chen-Wang [5]による山辺フローの元でのADM質量の挙動の研究が知られている．これらのことを踏まえて[12]で応募者たちは，重み付き山辺フローの下での重み付きADM質量の挙動を調べた．そこで今後は，リッチフローによる重み付きの正質量定理の別証明やAE多様体のある収束に関する重み付きのADM質量の下半連続性などについても検討したいと考えている．

- <u>スカラー曲率に関して特別な計量の研究</u>：Listing [16]は，$R_g \cdot g$（スカラー曲率×計量）という量に関するある（幾つかの）剛性定理を示した．一方で，この$R_g \cdot g$という量は，閉多様体上の正定スカラー曲率計量が山辺計量となるためのある十分条件の中にも現れることが加藤[13]によって示されている．このような事情から申請者は，Listing型の剛性定理が成り立つ計量と山辺計量やアインシュタイン計量との間の関係を調べたいと考えている．これまで申請者は[11]で，n次元$(n \geq 3)$閉多様体M^n上の計量g_0のトレースレスリッチテンソルのノルムがM上の各点で0ではなく（従って特にg_0はアインシュタイン計量ではない），g_0のスカラー曲率とリッチ曲率がある条件を満たすならば，g_0に対して種々のListing型剛性定理が成り立たないことを示した[3]．

[1] $S^1 \times S^2$上のワープ積の形

[2] 最近Law–Lopez–Santiagoらによって，何れの場合も実はより強い形の主張が成り立ち，さらにそれらは元々の重みのない正質量定理と等価であることが示された．

[3] 更にそれを満たす具体例も幾つか与えた．

参考文献

[1] **J. Baldauf and T. Ozuch**, Spinors and mass on weighted manifolds, Commun. Math. Phys. **394** (2022), no. 3, 1153–1172.

[2] **R. H. Bamler**, Some recent developments in Ricci flow, Proc. Int. Cong. Math. **4** (2022), 2432–2455.

[3] **P. Burkhardt-Guim**, Pointwise lower scalar curvature bounds for C^0 metrics via regularizing Ricci flow, Geom. Funct. Anal. **29**, 1703–1772 (2019).

[4] **R. Buzano and G. Di Matteo**, A local singularity analysis for the Ricci flow and its applications to Ricci flows with bounded scalar curvature, Calc. Var. Partial Differential Equations **61** (2021), no. 2.

[5] **E. Chen and Y. Wang**, The Yamabe flow on asymptotically flat manifolds, J. reine angew. Math. **2023** (2023), no. 803, 61–101.

[6] **L. Cheng and A. Zhu**, Yamabe flow and ADM mass on asymptotically flat manifolds, J. Math. Phys. **56** (2015), no. 10.

[7] **J. Chu and J. Zhu**, A non-spin method to the positive weighted mass theorem for weighted manifolds, J. Geom. Anal. **34** (2024), no. 9.

[8] **X. Dai and L.Ma**, Mass under the Ricci flow, Commun. Math. Phys. **274** (2007), no. 1, 65–80.

[9] **S. Hamanaka**, Limit theorems for the total scalar curvature, arXiv:2208.01865 (2022) (old version, C^0, C^1-limit theorems for total scalar curvatures).

URL: https://arxiv.org/abs/2208.01865. **Submitted**.

[10] —, Upper bound preservation of the total scalar curvature in a conformal class, arXiv:2301.05444 (2023). URL: https://arxiv.org/abs/2301.05444. **Submitted**.

[11] —, Extremal metrics in terms of scalar curvature, in preparation.

[12] **S. Hamanaka and P. T. Ho**, Weighted Yamabe flow on asymptotically flat metric measure spaces and weighted ADM mass, in preparation (2025).

[13] **S. Kato**, Examples of non-Einstein Yamabe metrics with positive scalar curvature, Tokyo J. Math. **17** (1994), no. 1, 187–189.

[14] **M. Llarull**, Sharp estimates and the Dirac operator, Math. Ann. **310** (1998), no. 1, 55–71.

[15] **Y. Li**, Ricci flow on asymptotically Euclidean manifolds, Geometry & Topology **22** (2018), no. 3, 1837–1891.

[16] **M. Listing**, Scalar curvature on compact symmetric spaces, arXiv preprint arXiv:1007.1832 (2010).

[17] **C. Sormani, W. Tian and C. Wang**, An extreme limit with nonnegative scalar curvature, Nonlinear Analysis **239** (2024), Paper No. 113427.