これまでの研究内容

林 拓磨

私の研究テーマは**可換環上の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群** (実簡約 Lie 群の表現の代数的モデル) と**関連する幾何学**である．

私の最初の研究テーマは**可換環上のコホモロジー誘導関手**であった．$\mathbb{C}$ 上の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の理論においてコホモロジー誘導とは, Harish-Chandra 対の射 $(\mathfrak{q}, M) \to (\mathfrak{g}, K)$ により定まる $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の圏から $(\mathfrak{q}, M)$ 加群の圏への忘却関手の右随伴関手 $I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{q},M}$ の導来関手である．この導来関手により主系列表現やコホモロジー誘導加群などの重要な表現が得られる．私は $\mathbb{C}$ 上の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群論を圏論的視点から見直すことで**可換環上の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群を定式化し，その一般論を構築した**．特に**右随伴関手 $I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{q},M}$ とその右導来関手を構成した** (論文 9, プレプリント 3)．また, 論文 8, 10 ではこの**導来関手と平坦底変換関手との交換性を調べた**．論文 10 では一定の条件下で肯定的な結果を, 8 では $\mathbb{Z}$ 上のときの非自明な反例を与えた．この反例は主系列表現を与えるべき誘導の整モデルが離散系列表現のモデルを与え, $\mathbb{C}$ **上では起こりえない**ことが興味深い．

ところで, 表現のモデルの中には環上のコホモロジー誘導では説明出来ないより小さい実・有理・整構造が存在する．**このより小さい定義環の存在は整数論への応用上重要である**ことが期待されている．そこで私は Fabian Januszewski 氏と共に**幾何学的構成**に目を向けた．コホモロジー誘導加群は「対応する」 $\mathfrak{g}$ の部分旗多様体の閉 K 軌道上の同変線束の捻じれ D 加群の順像関手の大域切断加群と同型である．私達はこの構成が幾何学的操作に依ることに着目した．そこで私達は**軌道や同変線束がより小さい環で定義できれば小さい環上定義された表現が得られる**と考えた．私達はこのアイデアの実現に取り組んだ．まず私は**部分旗概型及びその上の同変線束の定義環の降下問題に取り組んだ** (論文 7, 2)．次に私は Januszewski 氏と共に, **安定放物型部分群**という概念を導入し, そのモジュライ空間の軌道分解の定義環の降下問題を解決した．特に**コホモロジー誘導加群に対応する閉軌道の定義環の降下問題を解決した**．さらに私達は**一般の基礎概型上の捻じれ D 加群の理論を創始した**．これにより **コホモロジー誘導加群の $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式の構成に成功した** (プレプリント 2)．さらに, 私は**この $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式が $\mathbb{Z}[1/2]$ 加群として自由であることを証明した** (論文 6)．また, この定理の証明を利用してこのモデルの $(\mathfrak{g}, K)$ **コホモロジーの有限性を証明した** (プレプリント 2)．

閉軌道以外の定義環の降下にも取り組んだ．論文 2 では $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ の旗多様体のすべての $\mathrm{SO}(3, \mathbb{C})$ 軌道が標準的な $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式を持ち $\mathbb{Z}[1/2]$ **上アファイン埋め込みであること**, さらにそれら軌道の $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式が SL_3 の旗概型の集合論的分解を与えること**を証明した**．一般の簡約群概型の場合への一般化を論文 5 で与えた．

無限次元表現の定義体の決定問題に向けて論文 1 では既約表現の分類と定義体に関する一般論 (Loewy, Borel–Tits, Tits による有限次元表現の有理性の研究の一般化) を与えた．

抽象代数幾何学の立場からの**縮約族の基礎研究**を始めた (プレプリント 1)．縮約族とは Lie 群や Lie 環の構造定数を径数に置き換えて得られるある一径数族である．また, 縮約群概型の商, 特に対称対の縮約族の商を導入し, その基本構造を調べた．この族は**異なる実対称多様体 (対称空間) を結び付ける新しい多様体である**．この多様体は今後の対称空間及びその上の特殊関数の研究に新しい視点を与える可能性がある．

論文 4 では**準簡約スーパー代数群の既約表現の分類とその自己準同型多元環の決定**方法を与えた (論文 7 のスーパー類似)．また, 実準簡約スーパー代数群の基本的な例の場合にこれらを具体的に計算した．