

今後の研究計画 (2025年12月)

大阪公立大学
細野 竜也
tatsuya.hosono@omu.ac.jp

以下で用いる引用番号は、別紙の研究業績リストの論文番号に基づく。

今後の研究の中核として、放物型方程式を含む数理モデルを主な対象とし、方程式に内在するエネルギー散逸構造・変分構造を抽出することで解の性質や時間大域的な挙動を統一的に理解することを目標とする。特に主題とする走化性方程式は、相互作用を表す非局所非線形項に起因して有用な解析手法である比較定理などで解の定量的評価を得ることは一般的に困難である。さらに、完全放物型の連立系は、放物-楕円型の単純化した系に存在する良い構造(単調性や保存則など)がしばしば失われ、多くの場合に従来の手法は破綻する。本研究では、そのような方程式に対する新たな解析手法を考察し、理論の構築及び理解を深めることを目指す。具体的には、以下の研究課題を国際的な共同研究体制を維持しつつ取り組む。

研究 I: 非線形拡散を伴う走化性方程式の臨界構造と解の大域挙動の解明

非線形拡散 $\partial_t u - \nabla \cdot (u^{\alpha-1} \nabla u)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) を伴う走化性方程式を考察する。走化性項との釣り合いから拡散臨界指数 $\alpha_{c,n} = 2 - 4/n$ が与えられ、これを境目に解の大域挙動が臨界的に変わる。本問題は、Ph. Laurençot 氏との共同研究であり、 $n = 4$ の線形拡散 ([4]) と $n \geq 5$ で退化型拡散に相当する臨界現象については既に取り組んでいる。他方、低次元 $n \leq 3$ における fast diffusion の構造を持つ場合は、臨界指数 $\alpha_{c,n}$ 周りで予想とは異なる解挙動を示したり、非線形拡散と非局所非線形項を持つ特異性によって従来の手法が破綻したりする。そこで、根本的な解の性質や、拡散効果と対を成す走化性項に寄る集中効果が、特に臨界周辺で解の時間大域挙動にどの程度影響を与えるのかという問いに注目して解析を行う。

研究 II: 2次元全空間上放物-放物型 Keller–Segel 系の質量臨界と解の大域挙動の解明

2次元全空間上での放物-放物型 Keller–Segel 系では、初期質量 M の大きさが 8π を閾値として、解の特異性が発生する。本研究では、 $M = 8\pi$ での無限時刻爆発解の存在や定常解周りの安定性を考察する。放物-放物型の場合、系の安定化や系の第2成分の時間発展に伴う2次元モーメント保存や重心保存の破れによって、放物-楕円型の手法が適用できない。さらに“無限”を扱うため有限時刻爆発の手法はしばしば適用できない。本研究では、球対称解に対するエネルギー散逸評価とエネルギーの ODE 的解析、及び局所解析に着目する。また局所解析の第一段階として、 $M < 8\pi$ の時に時間大域解が一様有界となることを示す。

研究 III: 対数型知覚函数を伴う走化性方程式の解の時間大域挙動の解明

非線形項に対数型知覚函数を伴う走化性方程式の臨界構造を考察する。本題の n 次元空間に於ける解の大域挙動は、非線形項の知覚係数 χ の大きさに依存し、 $\chi^* = n/(n-2)_+$ が閾値であると予想されている。2次元の場合は Fujie–Senba (2016) により肯定的に示されている。他方、高次元の場合は部分的な結果は得られているが依然未解決である。この系の定常問題は χ 乗の冪型非線形項で与えられる半線形楕円型方程式であり、これは退化型 Keller–Segel 系の定常問題とほぼ同値である。そこで、その知見と変分構造の関係性に着目し、対数型走化性方程式の臨界現象の解明へアプローチを図る。

その他: 国際共同研究の深化

T. Cieřlak 氏と引き続き共同研究を行っており、拡散方程式と波動方程式の連立系である熱弾性系に着手している。この系は機械エネルギー保存とエントロピー散逸構造の両者を備えており、エネルギーが定義される最低限の正則性の下での解の漸近挙動を考察する。

また、現在のフランス在外研究の中で交流を図っている Ariane Trescases 氏 (CNRS & Université Toulouse) や Filippo Santambrogio 氏 (Université Lyon 1) と議論を遂行していく予定である。