これまででの研究成果のまとめ

(2025 年 12 月)

大阪公立大学
細野 竜也
tatsuya.hosono@omu.ac.jp

以下で用いる引用番号は, 別紙の研究業績リストの論文番号に基づく.

■ **これまでの研究概要:** これまで, 非線形偏微分方程式, 特に "走化性" と呼ばれる生物現象を記述した走化性方程式 (Keller–Segel 系) の臨界構造と解の大域挙動の解明に取り組んできた. この方程式は, 一般的に細胞密度と化学物質の濃度を未知函数とする放物型方程式の連立系で表され, 相互作用として非線形移流項 (走化性項) が与えられる. 定式化される方程式には, 主要部の「拡散項」と相互作用を表す「非線形移流項」から "拡散と集中" といった相反する効果を併せ持つため, 解の大域安定と特異性の生成 (有限時間爆発) が臨界的に分岐する. 特に, 数理モデルから要請される質量保存則 (L^1-保存則) に基づいて, 系の安定と不安定の両効果が解析的に釣り合う際に現れる質量臨界 (L^1-臨界) が主な研究対象となっている. 実際, 2 次元空間では初期質量の大きさが 8π を閾値として解の特異性 (爆発) が発生することが知られている. 私は, 主にこのような臨界構造について質量保存則と方程式に備わるエネルギー構造 · 変分構造を基に解析を進めてきた. より具体的には以下の通りである.

▶ **高次元空間に於ける優臨界での解の大域挙動の分類 (業績 [1, 5])**

高次元 (3 次元以上) は L^1-臨界性が失われ, 優臨界問題となる. 本研究では情報理論由来の Shannon 型不等式とその最良定数を用いたエネルギー評価により, 有限時刻爆発を誘発する初期値の臨界ノルム, ならびに大域解を保証する小ささの条件を導出した.

▶ **高次元空間に於ける走化性方程式の解の大域挙動と質量閾値の同定 (業績 [2, 3, 4, 7])**

業績 [2, 3] では, 4 次元空間で L^1-臨界となる単純化した放物-楕円型走化性方程式を考察し, 初期質量の閾値が $(8\pi)^2$ であることを同定した. 業績 [3] では, 臨界型函数不等式の 1 つである Brézis–Merle 型不等式及び対称減少再配置法に基づくある種最適な函数不等式の開発によって, 初期質量が $(8\pi)^2$ 未満の下で解は時間大域的に存在することを示した.

業績 [4] では, 完全放物型の連立系を考察した. 完全放物型の場合, 最適な初期条件の下での解の正則性の確保が困難となるが, 放物型方程式のエネルギーを楕円型方程式のエネルギーで評価する変分的構造に着目し, 放物-楕円型問題へ帰着させたことで, 時間大域解の存在を示した. また, 全空間での従来の手法では解の空間遠方の制御が困難となり時間依存した評価しか得られない問題があったため, 新たなエネルギー汎函数を確立し, 初期質量の適当な大きさの下, 解の有界性も示した.

業績 [7] では, n 次元で L^1-臨界となる全空間上の放物型-楕円型走化性方程式を研究対象とし, 各次元の質量臨界とその閾値の同定を, ある単調性公式を用いることで示した. さらに, 初期函数の形状が解の時間大域挙動に影響を与える点についても考察した.

▶ **非線形拡散方程式の Fisher 情報量と準線形 Keller–Segel 系の時間大域解 (業績 [6])**

本研究では, 先ず, 一般化された非線形拡散方程式 $\partial_t u = \nabla\cdot(a(u)\nabla u)$ の初期値境界値問題を考察し, 正値古典解に於ける Fisher 情報量に相当したエネルギー汎函数 (即ち, エントロピー散逸) の時間単調減少性とその散逸項に関する函数不等式を導出した. さらに, 1 次元空間特有のエネルギー汎函数の時間単調性も導出した. 応用として, 一般化された非線形拡散と応答函数を持つ準線形完全放物型 Keller–Segel 系を考察し, 1 次元で L^1-臨界となる状況下で, 任意の初期質量に対する時間大域解の存在を示した. 即ち, 2 次元以上の空間での L^1-臨界とは異なり, 特異性が発生しないことを示した. 実際, Fisher 情報量に基づく新たなエネルギー汎函数を構築することで, 従来充分とされたエントロピー構造だけでは得られなかった, より強い正則性評価を導出することが可能となり, 大域解の存在を示すことに繋がった.