今後の研究計画

今村 悠希

dg 圏のホモトピー論の再解釈：随伴関手定理のホモトピー類似とその応用

これまでに構成した 2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ 上の副射装備 $\mathbb{DB}\mathsf{imod}^{\mathrm{rqr}}$ を用いて、Toën の導来森田理論をはじめとする dg 圏のホモトピー論の諸結果を、形式圏論の観点から再解釈する。導来森田定理は、環上の加群論における森田定理の dg 類似であり、dg 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgCat})$ における同型

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{cc}}\big(D_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A}), D_{\mathrm{dg}}(\mathcal{B})\big) \cong D_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})$$

が成立することを主張する（ここで D_{dg} は dg 加群の導来 dg 圏を表し、左辺は余積を保つ擬関手のなす dg 圏である）。加群論における森田定理が随伴関手定理の帰結として得られるように、この同型もまた、その dg 類似として、ある種の随伴関手定理の自然な帰結であると期待される。本研究ではこの観点から、副射装備 $\mathbb{DB}\mathsf{imod}^{\mathrm{rqr}}$ における随伴関手定理を確立することで、導来森田定理の成立を形式圏論的に支える理論的基盤を明らかにする。

さらに擬関手に対する随伴関手定理の応用として、dg 圏に関する Gabriel–Popescu 型定理のホモトピー版を証明する。Porta による三角圏に対する Gabriel–Popescu 型定理との比較を行い、形式圏論的観点から両者の統一的理解を図る。

副射装備 $\mathbb{DB}\mathsf{imod}^{\mathrm{rqr}}$ の大域的性質：副射装備の局所化理論の構築

擬関手のなす 2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ が $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgCat})$ の 2 圏的拡張であるとする根拠は、次の圏同値が成り立つ点にある（ここで $\pi_0^{\cong}(-)$ は、2 圏の射の同型類の集合を取って圏を得る操作を表す）：

$$\pi_0^{\cong}(\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}) \simeq \mathsf{Ho}(\mathsf{dgCat}).$$

圏 $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgCat})$ が dgCat の局所化であったことを思い出すと、その高次版である 2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ もまた「2 圏としての局所化」になることが期待される。

本研究では、この予想をより一般化する枠組みとして、$\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ 上にある副射装備 $\mathbb{DB}\mathsf{imod}^{\mathrm{rqr}}$ が、dgCat 上にある自然な副射装備 $\mathbb{DGC}\mathsf{at}$ の「副射装備の構造まで含めた局所化」であることを証明する。副射装備における局所化の概念やそれと 2 圏の局所化との関連は、これまで明示的に議論されてこなかった。$\mathbb{DB}\mathsf{imod}^{\mathrm{rqr}}$ の持つ普遍性を調べることで、副射装備の局所化の適切な定義を与えることを目指す。さらに台となる 2 圏との関係を明らかにすることで、上述の予想を示す。