これまでの研究成果のまとめ

今村 悠希

Gabriel-Popescu 定理の dg 圏への拡張に関する研究

アーベル圏の中でも特に重要なクラスに、Grothendieck 圏と呼ばれるものがある。Grothendieck 圏は、圏に内在的な性質でもって定義されるアーベル圏であるが、加群圏の適切な部分圏としての外在的な特徴づけ（Gabriel–Popescu 定理）も知られている。私は、この定理の dg 圏への拡張を試みた。アーベル圏も dg 圏も、それぞれアーベル群の圏 Ab や複体の圏 Ch 上の豊穣圏として捉えられるため、豊穣圏論的観点から Gabriel–Popescu 定理を一般化するという方針を立てた。その視点に基づき、より一般の Grothendieck モノイダル圏上の豊穣圏に対して類似の定理を証明した。

dg 圏のなすホモトピー圏が持つ高次構造についての研究

dg 圏には、擬同値と呼ばれる弱い同値概念があり、擬同値な dg 圏は同じものだとみなすのが自然である。この意味で dg 圏を擬同値のもとで扱う理論を、dg 圏のホモトピー論と呼ぶ。2000 年代以降、dg 圏のなす圏の局所化圏 Ho(dgCat) が、dg 圏をホモトピー論的に扱う舞台として研究されてきた。しかしながら、圏 Ho(dgCat) の構造だけでは dg 圏が本来持つ 2 圏的な情報が失われている可能性があると考えていた。

位相空間のような対象とは異なり、dg 圏はもともと圏構造を持つ対象であるから、そのホモトピー論もまた高次の構造を備えているべきである。このような観点から、Ho(dgCat) の拡張となる 2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ を導入し、その 2 圏的性質を調べた。特に、この 2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ において擬同値が同値射として振る舞うことを証明した。同値射は 2 圏における「対象の同じさ」を定める自然な概念である。この観察は、$\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ が擬同値な dg 圏を区別しない圏 Ho(dgCat) の精密化として自然な 2 圏であることを示唆している。

さらに $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ 上に副射装備と呼ばれる構造があることを証明した。副射装備は 2 圏上に与えられる構造で、形式圏論と呼ばれる分野で導入された枠組みである。形式圏論とは、圏全体が持つ 2 次元的な情報を抽象化することによって「圏論」そのものの公理化を行う分野を指す。ちょうどアーベル圏の枠組みにおいて加群論でのホモロジー代数が抽象化されるように、副射装備の構造を用いることで一般の 2 圏において公理的に「圏論」を展開することができる。私は、$\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ 上の副射装備の構造に基づいて、形式圏論的な観点から dg 圏のホモトピー論を考察した。特に、dg 圏におけるホモトピー極限の概念を導入し、dg 圏に対するプレ三角性がある種の完備性として理解できることを示した。