これからの研究について

いくつかの記号についてはこれまでの研究の概要を参照のこと.

1. **2 変数の重み付き多項式近似**: 2 変数関数を $\mathbb{R}^2$ 上で重みを乗せて多項式で近似する問題を考察している. 現在は重みが $W(x,y)=w_1(x)w_2(y)$ のように 1 変数の積に変数分離される場合について, $fW\in L^p(\mathbb{R}^2)$ をみたす関数 f を近似する問題に着手している. de la Vallée Poussin 平均の 2 変数化

$$V_n(f)(x_1,x_2):=\frac{1}{n^2}\sum_{m_2=n+1}^{2n}\sum_{m_1=n+1}^{2n}s_{m_1,m_2}(f;x_1,x_2)$$

($s_{m_1,m_2}(f;x_1,x_2)$ は Fourier 部分和) に関しては H.N.Mhaskar が 2 変数の多項式の具体例として提示しているものの, それを用いて関数を近似する研究はこれまでに例が無い. 筆者は 2 変数の de la Vallée Poussin 平均について, L^p 有界性, modulus of contiuity を用いての収束条件, 近似度の評価, f が連続な有界変動関数の場合の収束性の評価, などについての結果までは現状で得ることができた. さらにもう一つのトピックとして, Lagrange 補間多項式の iteration による 2 変数化

$$L_n(W;(x_1,x_2)):=L_{n,2}(w_2^2,L_{n,1}(w_1^2,f_{x_2};x_1);x_2)$$

($L_{n,i}$ とは重み w_i に関する n 次の Lagrange 補間多項式) に関しての収束条件などの考察を進めている. さらに, より一般の 2 変数の重みに対しても考察を広げてゆくことも今後の課題となる.

2. **これまでの結果の精密化**:

   (a) **Laguerre 型の重みに関する Lagrange の補間多項式**: $\mathbb{R}^+:=[0,\infty)$ 上の重み w_ρ と連続関数 f について, 重み $w_{\rho*}$ についての Lagrange の補間多項式 $L^*_{n,\rho^*}(f)$ の収束条件, 即ち

$$\lim_{n\to\infty}\|(L^*_{n,\rho^*}(f)-f)w_\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}=0 \tag{A}$$

   が成立する条件であるが, $p=2$ および $1<p<2$ 場合に成立する条件を既に示すことが出来た. 一方で,$2<p<\infty$ の場合, 重み $\Phi^{*(1/2-1/p)^+}(x)w_\rho(x)$ について (A) に準ずる結果を得た. これらに関しては $p=2$, $1<p<2$, $2<p$ の証明の仕方が異なり, それに伴って条件もそれぞれの場合で異なるため, p についての連続性が不明であり, これについての考察が目下の課題となっている. さらにこれらの近似度の評価も今後の重要な課題である.

   (b) **de la Vallée Poussin 平均**: 筆者はこれまでに de la Vallée Poussin 平均の微分の L^p 有界性を以下の形で示している: w は $\mathcal{F}(C^2+)$ のより滑らかな部分集合 $\mathcal{F}_\lambda(C^4+)$ とする. $T^{(2j+1)/4}fw\in L^p(\mathbb{R})$ のとき $2\le p\le\infty$ について

$$\|v_n(f)^{(j)}w\|_{L^p(\mathbb{R})}\le C\left(\frac{n}{a_n}\right)^j\|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{B}$$

   が任意の $1\le j\le k$ 及び $n\in\mathbb{N}$ について成り立つが, 現在は (B) が $1\le p\le 2$ の場合に成立するかは不明である. de la Vallée Poussin 平均の L^p 有界性を証明する際に L^1 の双対定理と Riesz-Thorin の補間定理を用いたが, 微分の場合は T の非有界性のために L^1 ノルムの双対定理を利用できないことが問題となっている. Erdős 型の場合の問題の解決策は, 非有界な T を評価する手法を各問題に応じて構築することにある.

(伊藤　健太郎)