

これまでの研究の概要

研究のテーマはポテンシャル論の応用としての多項式近似の理論である. 一般に, \mathbb{R} 上の多項式は無遠点の近くで正または負の無限大に発散するため, \mathbb{R} 全体での関数の近似を扱うにあたっては不便を生ずる. そのため, 任意の非負の整数 n に対して $\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^n w(t) = 0$ となるような適当な重み関数 w を乗じて考える必要がある. これに関して以下の問題が知られている.

“ $1 \leq p \leq \infty$ とする. 重み w に対して \mathbb{R} 上の関数 f が $fw \in L^p(\mathbb{R})$ をみたすとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f - P_n)w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad (\text{A})$$

となるような多項式の列 $\{P_n\}$ は存在するか?” この問をみたす多項式を具体的に求めることが研究の主題である. 本研究では重み w は滑らかな $\mathcal{F}(C^2+)$ と呼ばれるクラスに属するものに限定して扱うものとする. 重み w を $w(t) = \exp(-Q(t))$ と表し, $T(t) := tQ'(t)/Q(t)$, ($t \neq 0$) と定義する. T の挙動によって $\mathcal{F}(C^2+)$ に属する重みは 2 種類に分類され, T が有界のとき w を Freud 型と呼び, T が有界でないとき w を Erdős 型と呼ぶ. 本研究では Erdős 型を主に扱う. これまでの研究で得られた結果は以下の通りである:

1. **de la Vallée Poussin 平均:** 関数 f の de la Vallée Poussin 平均 $v_n(f)$ は $v_n(f)(t) := \frac{1}{n} \sum_{j=n+1}^{2n} s_j(f)(t)$ によって定義される. ここで $s_m(f)(t)$ は f の重み w に関する直交多項式の Fourier 部分和である. f の近似度を $E_{p,n}(w; f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|(f - P)w\|_{L^p(\mathbb{R})}$ で定義する. ここで \mathcal{P}_n は次数が高々 n 次の多項式全体である. さらに $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ について或る $c > 0$ に対して $T(a_n) \leq c(n/a_n)^{2/3}$ であることを仮定する. 記号 a_n とは MRS 数と呼ばれる w から導かれる量である. このとき定数 $C \geq 1$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $fw \in L^p(\mathbb{R})$ のとき以下が成り立つ:

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w; f). \quad (\text{B})$$

これまでに (B) の右辺が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する条件を示した. さらに f がより滑らかであれば $v_n(f)$ は f だけでなくその微分が f' に対しても近似を与えることも示した.

2. **Fourier 部分和:** 平均をとる前の Fourier 部分和 $s_n(f)$ の一様収束の条件も別に以下のように示している: w は $\mathcal{F}_\lambda(C^3+)$, ($0 < \lambda < 3/2$) という $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ のより滑らかな部分集合を考える. f は連続かつ \mathbb{R} の任意の有界閉区間上で有界変動とし, $\int_{\mathbb{R}} w(t)|df(t)| < \infty$ をみたすとき次が成り立つ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (f - s_n(f))wT^{-1/4} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

3. **Laguerre 型の重みに関する Lagrange の補間多項式:** $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ に関する解析についての結果である. ここでは重み $w = \exp(-R(x))$ は滑らかなクラス $\tilde{\mathcal{L}}_\lambda(C^3+)$ に属するものとし, w_ρ を $w_\rho(x) := x^\rho w(x)$ ($\rho > 0$) と定める. $f \in C(\mathbb{R}^+)$, に対し $\{x_{j,n,\rho}\}_{j=1}^n$ に関する Lagrange の補間多項式を $L_{n,\rho}^*(f)(x)$ とする. $\{x_{j,n,\rho}\}_{j=1}^n$ は w_ρ に関する n 次の直交多項式の零点である. ここでは Lagrange の補間多項式が重み w_ρ に関して L^p ノルムで f に収束する条件を示した: $p = 2$ のとき, $\beta > 1/2$ として $(1+x)^{\beta/2+1/4}w_\rho(x)f(x) \rightarrow 0(x \rightarrow \infty)$, また, $1 < p < 2$ のとき, $\beta > 1/p$ として $(1+x)^{\beta/2+1/4}T^{*1/2}(x)\Phi^{*-1/4}(x)w_{\rho^*}(x)f(x) \rightarrow 0(x \rightarrow \infty)$ をみたすとき (ただし $\Phi^*(x) := (T^*(x)(1+R(x))^{2/3})^{-1}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_{n,\rho^*}^*(f) - f)w_{\rho^*}\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} = 0. \quad (\text{C})$$

ただし, $L_{n,\rho^*}^*(f)$ とは重みを $w_{\rho^*} := w_{\rho+1/2p-1/4}$ とした場合の Lagrange 補間多項式である. また, $2 < p$ の場合にも重み $\Phi^{*(1/2-1/p)^+}(x)w_\rho(x)$ に関して (C) に相当する結果が成立する条件を示した.