

(I) calibrated 部分多様体の具体的研究

具体例は特異点の局所モデルを与え、特異点解消等に非常に重要である。しかし構成には非線形偏微分方程式を解く必要があり、これは一般に難しい。[論文 1] では、 \mathbb{C}^n 上の Joyce の運動量写像の手法を応用し、ある一般のトーリック多様体内に特殊ラグランジュ部分多様体の例を構成した。[論文 2,9,21] では Lie 群の対称性を用いて、ある G_2 多様体の等質な calibrated 部分多様体を分類し、多くの余等質性 1 の例を構成した。特に錐特異点 (錐 (cone) の形をした特異点) を持つ例、その特異点解消の例を構成した。

また錐特異点の解析のために [論文 4, 6, 20, 7] では、等質な Cayley 錐多様体の無限小 (1 次) 変形、2 次変形を表現論を用いて調べ、モジュライの局所的構造を解明した。

(II) $G_2, \text{Spin}(7)$ 多様体の位相とモジュライ空間の研究

[論文 8, 10, 22] では H. V. Lê 氏、L. Schwachhöfer 氏と共同で Frölicher-Nijenhuis bracket という代数的構造を用いて $G_2, \text{Spin}(7)$ 多様体を調べた。[論文 12] では上の 2 氏および D. Fiorenza 氏とともに、これらをより発展・一般化した。一般的な次数付き微分環の考察から、リッチ曲率が非負の計量が入るための新しい位相的障害を発見した。(特に $G_2, \text{Spin}(7)$ 構造が入るための新しい障害になる。) [論文 11] では様々な幾何構造のモジュライ空間の共通の性質を見出し、その応用として、 G_2 構造の空間上の自然な計量、リーマン計量の空間上の Ebin 計量を共形変換した時の完備化の構造の違いを調べた。

(III) calibrated 部分多様体とその「ミラー」の類似性の研究

dHYM, $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続は、calibrated 部分多様体や HYM, $G_2, \text{Spin}(7)$ -instanton の類似と考えられるが、類似性が厳密に成り立つかは確認の必要がある。[論文 13–16] では、筑波大学の山本光氏と共同で、実際モジュライ空間に多くの類似点を発見した。

[論文 13, 15] では、幾何構造の摂動で dHYM, $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続のモジュライ空間は自然な向きを持つ滑らかな多様体で、連結成分はトーラスになることを示した。

トーラス束に対する「実フーリエ向井変換」により Lee-Leung は $\text{Spin}(7)$ -dDT 接続を定義したが、他の幾何と両立しない等の問題があった。再度この手法を正確に行い、[論文 14] では $\text{Spin}(7)$ -dDT 接続のより適切な定義を提案した。

臨界点が G_2 -dDT 接続になる汎関数の存在が知られている。[論文 18] では適切な設定下で「その勾配ベクトル場の積分曲線はシリンダー上の $\text{Spin}(7)$ -dDT 接続の方程式と解せる」ことを示した。これは、3 次元多様体上の instanton Floer homology にある観察の類似で、3,4 次元多様体と $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続の理論の間の新しい繋がりを与えた。

部分多様体の体積の「ミラー」として、接続の「体積」 V が定義される。(物理では Dirac-Born-Infeld (DBI) action と呼ばれる。) [論文 16] では $G_2, \text{Spin}(7)$ 幾何の基本的だが重要な等式である Cayley, associator equality の「ミラー」が成立することを示し、これを用いて

- (a) $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続が「体積」 V の最小を与え、その値が位相的に書けること、
(これは calibrated 部分多様体がホモロジー類の中で体積最小であることに対応する。)
- (b) 平坦束の $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続は平坦接続しかないこと、
- (c) $G_2, \text{Spin}(7)$ 多様体のホロノミー群が還元する場合に、モジュライ空間の構造を決定した。
また関連して、「体積」 V の勾配流 (ミラー平均曲率流) の短時間存在と一意性を示した。

(III') 極小部分多様体の「ミラー」(極小接続) の性質の研究

極小部分多様体の類似で、接続の「体積」 V の臨界点を極小接続とよぶ。([論文 16] より $G_2, \text{Spin}(7)$ -dDT 接続は V を最小するので、特に極小接続になる。) [論文 17] では、極小接続は極小部分多様体のミラーであって、Yang-Mills 接続の類似であることを示した。また Yang-Mills 接続に対する Price の単調性定理のある種の類似を極小接続に対して示した。その応用として、奇数次元ユークリッド空間上での消滅定理 (Liouville 型定理) を得た。