これからの研究

これまでの研究を踏まえ今後以下に挑む。

1. 与えられたグラフを Reeb グラフとするような良い関数（可微分関数の場合）と Morse(-Bott) 関数の分類等。

近年、逆像(レベルセット)に初めて着目し、多くの研究業績を残している領域である。Morse-Bott 関数は射影と Morse 関数の合成であるような可微分関数である。まず、以下に挑む。

1-1. 3 次元閉多様体の Morse(-Bott) 関数。

1-1-1. 適切な 3 次元向き付け可能連結閉多様体の上の Morse(-Bott) 関数の分類。

応募者が扱ってきた円周上のトーラスをファイバーとする束、レンズ空間、$S^1 \times S^2$ の連結和とその上の臨界点を含まないレベルセットが球面かトーラスである Morse-Bott 関数で臨界点に特別な条件がついたものの分類に関する研究の続きを進めます。Reeb グラフの各頂点に商写像で写像される臨界点が 1 個である Morse 関数について、次数 2 つまり丁度 2 辺に含まれる頂点の個数とループを非可換な代数で表す基本群の情報の関係に関する Michalak の研究 https://arxiv.org/abs/2403.02291 がある。同プレプリント、向き付け可能閉曲面上の円周をファイバーとする束の上の場合等を具体的に考察している。一方、レベルセットの型については考察や言及はない。例えば、

- 円周上のトーラスをファイバーとする束、レンズ空間、$S^1 \times S^2$ の連結和上の Morse 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について、出てくる臨界点を含まないレベルセットの閉曲面の種数の最大とそのような閉曲面が商写像の逆像に出る Reeb グラフの辺の数の組(g_f, e_{fg_f})を考え確認する。そして、辞書式順序が最も小さいような関数の分類を考える。
- 向き付け可能閉曲面上の円周をファイバーとする束の上での同様の考察。

1-2. より高い次元の閉多様体の Morse(-Bott) 関数。

4 次元の向き付け可能閉多様体の場合等が考える。次元が高くなる中問題設定等から難しくなるといえる。ひとつ、Morse 関数や平面への折り目写像より一般にいわゆるジェネリックな可微分写像と相性のよい多様体の分解、いわゆる 3 次元の Heegaard 分解や高次元化である trisection multisection がある。関連研究についていくらか学習調査研究が既にあることは重要となる。

2. 与えられたグラフを Reeb グラフとするような良い関数（実代数・実解析）と関連して球面の射影複素射影空間より一般化してトーリックシンプレクティック多様体のモーメント写像を意識一般化した実代数写像。

“具体的な解決”を増やし、一般論に本質的に影響を与える貢献を目指す。実代数幾何に特に具体例という面から貢献する。例えば前述”1.”の実代数版には“これまでの研究”にあるように既に着手した。球面の射影複素射影空間より一般化してトーリックシンプレクティック多様体のモーメント写像を意識一般化した実代数写像構成が応募者の新たな成果で今後の基本である。