これまでの研究

専門は「可微分写像の特異点論」と「多様体の幾何学への応用」、具体的なMorse 関数や良い可微分関数、値域を高次元化し写像が研究対象である。

1. **折り目写像と定義域多様体に関する基本的考察。** 可微分多様体には Morse 関数が必ず、たくさんある。特異点から多様体のホモロジー群等代数的な情報や変形に関するホモトピーの情報がわかる。高次元化する流れが、前世紀半ば Thom や Whitney により始められ、Levine そして Eliashberg らを経て「佐伯 修　氏(九州大学)」「佐久間 一浩　氏(近畿大学)」らに引き継がれた。折り目写像という、局所的に Morse 関数と恒等写像の直積であるような写像のクラスがある。例えば、球面の射影は特異点の集合が赤道に一致しそれが埋めこまれた感じになる。一般化した同心円形折り目写像というものを重要と考え導入した: 基本的な代数的不変量の計算を行い、球面上の球面をファイバーとする束の連結和であるような多様体等基本的な多様体に非自明な例を構成した(発表論文1.1、1.2、2.1、3)。余次元-1 の場合について分類した他また、3次元向き付け可能閉多様体がこういう写像を持つための必要十分条件が「所謂グラフ多様体であること」というのを明らかにできた(それぞれ発表論文1.5、1.7)。ホモトピー球面上の、特異点を丁度2個有するMorse関数、単位球面の射影は、special generic 写像へ一般化される。前述の流れで Burlet 氏 De Rham 氏が 1970 年代に定義し佐伯氏佐久間氏が21世紀に入る直前あたりから活発に研究してきた。定義の厳しさから、定義域多様体の位相や可微分構造は強い制限を受ける。一方、球面の直積の連結和で表せる多様体等はかなりの状況下で自然な special generic 写像をもつ。コホモロジー環に着目し、Special generic 写像をもつための制限を多く明らかにした(発表論文4.1、4.2、4.4-7、4.14)。例えば射影空間が殆どの次元のユークリッド空間に special generic 写像を持たないことを示した。

2. **Reeb グラフと良い可微分関数の再構成。** Reeb グラフは、滑らかな関数の逆像レベルセットの連結成分からなる商空間で、閉多様体上の臨界値の集合が有限である関数の場合、臨界点を含む連結成分を頂点としたグラフになる。20 世紀半ばには登場しており、多様体を簡略化する重要な道具で、可視化等への応用でも重要である。 Sharko は、2006 年「与えられたグラフと同型な Reeb グラフを持つ良い性質を有する滑らかな関数が作れるか」という問題を出し、Sharko 続いて佐伯氏とその学生であった「増本泰隆氏（九州大学）」が結果を改良する形で任意の有限グラフに関し閉曲面上の関数を構成した。続き、 Michalak が臨界点を含まないようなレベルセットの連結成分が球面である Morse 関数を適切な条件を満たすグラフに対し構成した。研究員は、逆像のトポロジーも(球面とは限らないものを)前もって与えて良いクラスの関数を構成、閉多様体とは限らない多様体上の関数を構成する等という新たな試みに成功した(発表論文 1.3、1.4、4.3、4.11、4.12)。円周と 2 次元球面の直積、3 次元のレンズ空間を連結和して得られる多様体の、 Morse 関数で臨界点を含まないレベルセットが 2 次元球面かトーラスであるものの Reeb グラフとレベルセットのみたす条件を求めた(発表論文 4.10)。Michalak の 2 次元の場合の似た考察の高次元化、佐伯氏が 2006 年に得ていた特徴づけに関する結果の、Reeb グラフの変形と逆像の構造の観察による深化である。最近、代数幾何等に関連する学際的な領域で、適切なグラフを与え実代数関数を構成することにも成功した(発表論文 1.6、2.2、2.3、4.8、4.9、4.13)。