今後の研究計画（ 今野 均 ）

これまでに得た成果の一般化や予想の解決に取り組むとともに, 楕円量子群の表現に基づく代数解析的方法と Okounkov らによる幾何学的表現論との融合を目指す研究に取り組む.

1. 楕円量子群の表現と箙多様体の幾何学

楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ や $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{g}_{tor})$ と Okounkov らが幾何学的に定式化した「$E_T(X)$ 上の量子群構造」との同等性の確立を目指す. 楕円量子群の頂点作用素の積分核と Stab の対応を任意の表現に拡張していくとともに, L-作用素のガウス分解と Stab との直接的な関係も明らかにしていく. 一方で, 楕円量子群の幾何学的表現を楕円 Stab を用いて直接導出することにも取り組み, 同変楕円コホモロジーの表現論的な構造を明らかにする. また, Okounkov により導入された K-理論的頂点関数を楕円量子群の頂点作用素の期待値として構成する方法を一般の箙の場合へ拡張し, 頂点関数が満たすべき p-KZ 方程式や量子差分方程式などの表現論的な導出を行う. さらには, 超対称ゲージ理論において予想される箙多様体間の 3 次元ミラー対称性（より一般にはシンプレクティック双対性）が頂点関数間の双対性として理解できることが期待されているので, 同関数の明示式に基づいてこの予想を検証していく.

2. 楕円量子群に基づく変形 W 代数の再定式化

楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ や $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{g}_{tor})$ は, 変形 W 代数の遮蔽カレントが成す代数という側面を持ち, これを用いるとこれまで知られている生成元による直接的な定式化に相補的な異なる変形 W 代数の定式化を与えることができる. 従来の定式化では, 変形 W-代数自身は余代数構造を持たないために, 表現論や数理物理において重要な役割を果たす頂点作用素の定義や系統的な導出が不可能であったが, 楕円量子群の余代数構造を用いることでこれらは可能になる. これを確立し, アフィン箙型の場合も含めた種々の変形 W 代数に対して, 頂点作用素の導出やその交換関係等の性質の解明, 相関関数（合成積の期待値やトレース）としての K-理論的頂点関数やその楕円的拡張が満たす差分方程式の導出やその解の構造を系統的に調べ明らかにしていく.

3. 箙多様体に対する量子同変 K-理論や量子同変楕円コホモロジーの表現論的定式化

Okoukov らによる箙多様体 X に対する量子同変 K-理論 $QK_T(X)$ の幾何学的な定式化を代数側から補完するものとして, $QK_T(X)$ の環構造, 特に量子積の表現論的な定式化を目指す. そのために, 量子群の表現と量子可積分系, 量子同変 K-理論の三つ巴の関係を使う. 同変 K-理論の類は量子可積分系の保存量に対応し, それは量子群における Gelfand-Tsetlin (GT) 部分代数に対応する. 局所化した状況では任意の K-理論類は固定点類上で対角化されるが, これは量子可積分系の対角化問題に焼き直せ, この問題は量子群構造から導かれるベーテ仮説法によって解くことができる. この三つ巴の関係を楕円関数型の場合へと適用し, GT 部分代数の対角化から楕円コホモロジー類や K-理論類の量子積の構造を調べる. X がグラスマン多様体や旗多様体の余接束に対応する $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ や $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ に対して, これを実行し, Smirnov や Mihalcea らの先行研究で得られている量子積の明示式と比較することで結果を検証する. さらには, これをアフィン箙多様体に対応する楕円量子トロイダル代数 $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{g}_{tor})$ の場合へと拡張して調べる.