研究成果のまとめ（ 今野 均 ）

楕円量子群の定式化や表現の整備, それらと箙多様体上の K-理論や楕円コホモロジーといった幾何学との対応や可解格子模型や超対称ゲージ理論の代数解析への応用に関する研究において次の成果を得た.

(1) 楕円量子群の定式化

アフィン・リー環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ に付随する楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ を, 量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の Drinfeld 生成元による実現の p-変形として定式化した. $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ は同時に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の GKO コセットとして得られる W 代数の q-変形理論（遮蔽カレントが成す代数）を与えており, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ のユニークな楕円関数的変形になっている. また, 余代数構造としては, Etingof-Varchenko が導入したホップ亜代数構造の楕円関数型かつ中心拡大をもつ場合への拡張が入ることを明らかにした. さらに, この定式化を拡張して, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の二重ループ代数への拡張であるトロイダル代数 $\mathfrak{g}_{tor}$ に付随する楕円量子群 $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{g}_{tor})$ を定式化し, この場合は, 木村-Pestun が導入したアフィン箙型変形 W 代数を与えるという予想を得た. 一方, 量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の 3 つの同値な定式化に対応して, 楕円量子群に対しても同値な別の定式化として, Chevalley 生成元による $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の実現（Drinfeld-Jimbo 実現）の準 Hopf 変形として, 頂点型楕円量子群 $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ や面型楕円量子群 $\mathcal{B}_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の定式化, 面型 Yang-Baxter 方程式の楕円関数解 R に対して, $RLL = LLR^*$ 型の関係式を満たす L-作用素を生成元とする楕円量子群 $E_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ の定式化を与えた.

(2) 楕円量子群の表現と箙多様体の同変 K-理論や同変楕円コホモロジーとの対応

Okounkov らによって, 箙多様体 X の同変コホモロジー $H_T^*(X)$ や同変 K-理論 $K_T(X)$ さらには同変楕円コホモロジー $E_T(X)$ 上には stable envelope (Stab) と呼ばれる「良い類」が存在し, それを用いて量子群構造が幾何学的に定式化できることが示されている. 特に, 楕円の場合「$E_T(X)$ 上の量子群構造」と我々の $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ や $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{g}_{tor})$ とは同じものを与えると予想される. この予想の解決に向けて, 楕円量子群の頂点作用素に現れる積分核が対応する箙多様体 X の同変楕円コホモロジー $E_T(X)$ に対する楕円 Stab と同一視できることをいくつかの例で示した. そこでは, 頂点作用素の合成において代数的な操作で得られる積分核の shuffle 積の構造と楕円 Stab が持つ幾何学的な shuffle 積の構造とが整合していることが重要な鍵となる. この整合性はまた, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ のベクトル表現のテンソル積や, $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{gl}_{1,tor})$ や $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{gl}_{N,tor})$ のレベル (0,-1) 表現のテンソル積が, それぞれ対応する同変楕円コホモロジー上の同代数の幾何学的表現と同値であることを予想させる. 実際, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ の場合には, 前者における Gelfand-Tsetlin(GT) 基底と $E_T(X)$ における固定点類との間に全単射な関係を与え, GT 基底上の有限次元表現が固定点類上の幾何学的表現に持ち上がることを示した. 一方, Okounkov らは, 箙多様体 X に対して, $\mathbb{P}^1$ から X への quasi-map の数え上げ母関数として K-理論的頂点関数を導入し, 量子同変 K-理論 $QK_T(X)$ の構築を行っている. $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ や $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{gl}_{1,tor})$, $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{gl}_{N,tor})$ の場合に, 楕円量子群の頂点作用素の合成積の期待値として, 対応する K-理論的頂点関数が表現論的に導出できることを示し, $QK_T(X)$ と楕円量子群の新しい関係を見出した.

(3) 可解格子模型や超対称ゲージ理論の代数解析

楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の表現に基づいて, 柏原-神保-三輪らの量子群の表現に基づく可解格子模型の代数解析的定式化を楕円関数型の模型の場合へ拡張し, ABF 模型や 8-vertex 模型, そのフュージョン模型, dilute A_L 模型等の代数解析的定式化と相関関数の導出を行なった. 一方, (1) で述べたように, 楕円量子トロイダル代数 $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{gl}_{1,tor})$ は Jordan 箙多様体 $\mathcal{M}(n,r)$(≅ インスタントン・モジュライ空間) 型変形 W-代数の同値な定式化を与えるが, その生成母関数 $T(u)$ が $U_{t_1,t_2,p}(\mathfrak{gl}_{1,tor})$ の頂点作用素の合成として得られること, 及び $T(u)$ の合成積の期待値やトレースとして, $\mathcal{M}(n,r)$ の Hirzebruch χ_p-種数や楕円種数が得られることを示した. これらの種数はそれぞれ, 4 次元の $\mathcal{N} = 2^*$ 超対称ゲージ理論の 5 次元や 6 次元への拡張理論におけるインスタントン・分配関数を与える. この結果は, 代数解析的手法が超対称ゲージ理論の研究にも有効であることを示している.