小脇 修和

グラスマン多様体は射影空間の一般化であり、射影多様体の最も基本的な例として古くから研究されている。近年では正値幾何学などにより素粒子物理学などとの関係も指摘されており、その重要性は未だ色褪せてはいない。

射影多様体などの代数多様体の研究はその座標環を通じて代数的に研究することが一つの方法であるが、一般的な剰余環の研究は極めて困難である。そこで、イニシャル代数という、単項式順序や重みによる順序を導入して、多項式環を割るイデアルを単項式イデアルやトーリックイデアルといった扱いやすいものに落とし込む手法が研究されている。イニシャル代数が Cohen-Macaulay 性や正規性等の良い性質を持てば、元の座標環も同じ性質を持つことが知られている。しかし、元の座標環がこれらの良い性質を持っていても、イニシャル代数にそれが遺伝するとは限らず、多くの良いイニシャル代数を見つけることが求められている。

それを踏まえ、応募者はグラスマン多様体の可能な限り多くのトーリック退化を得ること、つまりは、定義イデアルに順序を入れてトーリックイデアルに落とし込むこと、を目的に研究を行っている。グラスマン多様体のトーリック退化の研究には様々な手法があるが、応募者はコヒーレントマッチングフィールドという、行列により引き起こされるような順序の導入によるトーリック退化を行っている。この順序により、グラスマン多様体の定義イデアルであるプリュッカーイデアルのイニシャルイデアルがトーリックイデアルになっているかを判定するにはプリュッカー座標がグラスマン多様体の座標環であるプリュッカー代数の SAGBI 基底となっていることを確かめれば十分である。SAGBI 基底はイデアルでのグレブナー基底の部分代数版である。

しかし、SAGBI 基底の判定はそれほど簡単ではない。グレブナー基底であれば、有限時間でブッフバーガーアルゴリズムを用いて求められるが、SAGBI 基底は有限生成部分加群の場合でさえ無限となることがあり得る。それゆえ、あるコヒーレントマッチングフィールドが与えられたとき、SAGBI 基底の判定を行うことなくトーリック退化が為されるかの判定を行う手法が求められる。応募者はコヒーレントマッチングフィールドに対応するトロピカル超平面配置の情報からこれを判定する十分条件を得た。

もう少し詳細に説明すると、二つのマッチングフィールドに対応する多面体が組み合わせ変異同値と呼ばれる関係を持つなら、二つのマッチングフィールドのどちらかがトーリック退化を引き起こすなら、もう一つもそうであることが知られているので、二つのマッチングフィールドに対応するトロピカル超平面配置がどのような関係を持てば対応する多面体が組み合わせ変異同値となるかを調べることで結果を得た。

組み合わせ変異同値はクラスター代数から来る概念であり、上で述べた研究はトロピカル幾何の情報からクラスター代数的な情報を得るものと見ることもでき、無限可積分系の分野で同様の結果が得られている。それゆえ、上の研究を無限可積分系の言葉で言い換えることで無限可積分系の結果が得られないかを現在研究している。