(2) これまでの研究成果のまとめ 真瀬 真樹子

これまでの研究では射影 $K3$ 曲面族のミラー対称性や, 代数的 $K3$ 曲面に作用する自己同型について調べてきた.

1. Berglund-Hübsch ミラーに関係する $K3$ 曲面族の間の対称性について

原点での $\mathbb{C}^3$ の孤立超曲面特異点 $(f=0)$ と $(f'=0)$ が, "transpose-dual" bimodal 特異点を定めるとする. これは f と f' のベキの定める行列が互いに転置になっていることを意味し, このような関係を Berglund-Hübsch ミラーと呼ぶ. 実は f (resp. f') の斉次化 F (resp. F') として $K3$ 重み系 $\boldsymbol{a}=(a_i)_{i=0,\dots,3}$ (resp. $\boldsymbol{b}=(b_i)_{i=0,\dots,3}$) 付きの準斉次 d (resp. d') 次多項式を取ることができる. ただし, $\boldsymbol{a}$ (resp. $\boldsymbol{b}$) が $K3$ 重み系であるとは, 対応する 3 次元多面体 $\Delta_{\boldsymbol{a}}$ (resp. $\Delta_{\boldsymbol{b}}$) が反射的であることを意味する.

一般に Batyrev によれば 3 次元反射的多面体 Δ は 3 次元 トーリック複素 Fano 多様体 $\mathbb{P}_\Delta$ と, その中の Gorenstein $K3$ (超) 曲面を定める. 故に $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}_\Delta$, そして任意の十分一般な $\mathbb{P}_\Delta$ の反標準切断の極小モデルの Picard 格子として, 族 $\mathcal{F}_\Delta$ の Picard 格子 Pic_Δ が定まる. 更に Pic_Δ の部分格子 $(\mathrm{Pic}_\Delta)_{tor}$ を $\mathbb{P}_\Delta$ 上の トーリック因子の反標準因子への制限により生成された格子として定める.

特に $K3$ 重み系 $\boldsymbol{a}$ (resp. $\boldsymbol{b}$) による多面体 $\Delta=\Delta_{\boldsymbol{a}}$ (resp. $\Delta_{\boldsymbol{b}}$) の場合は, 得られる $K3$ 曲面族を $\mathcal{F}_{\boldsymbol{a}}$ (resp. $\mathcal{F}_{\boldsymbol{b}}$) とし, Picard 格子は $\mathrm{Pic}_{\boldsymbol{a}}$ (resp. $\mathrm{Pic}_{\boldsymbol{b}}$) とする. 更に $\mathbb{P}(\boldsymbol{a})$ (resp. $\mathbb{P}(\boldsymbol{b})$) は 3 次元トーリック多様体であり, 多面体 $\Delta_{\boldsymbol{a}}$ (resp. $\Delta_{\boldsymbol{b}}$) により定まる. 多項式 P の Newton 多面体を Δ_P と記し Δ の極双対多面体を Δ^* と書く. 申請者, 及びその共同研究者により, 以下の定理が得られた:

定理. 上記の仮定の下 (1) 2 つの族 $\mathcal{F}_a$ と $\mathcal{F}_b$ は *polytope-dual* である. 即ち 反射的多面体の組 (Δ,Δ') が存在し以下をみたす:

$$\Delta_F \subseteq \Delta \subseteq \Delta_a, \quad \Delta_{F'} \subseteq \Delta' \subseteq \Delta_b, \quad \text{及び} \quad \Delta^* \simeq \Delta'.$$

(2) 前主張 *(1)* で得られた任意の組 (Δ,Δ') に対し, 次の対称性が成り立つ:

$$(\mathrm{Pic}_\Delta)^\perp_{\Lambda_{K3}} \simeq U \oplus (\mathrm{Pic}_{\Delta'})_{tor}. \quad \Box$$

2. $Q \simeq C_2$ または C_3 のときの有限群 G によるシンプレクティック自己同型について

有限群 G によるシンプレクティック自己同型を持つ $K3$ 曲面 X を考え, 群 G のアーベル化群 $G/[G,G]$ を Q と記す. 商多様体 X/G は高々商特異点を含むので, 最小クレパント特異点解消 $Y \to X/G$ が存在し, 非特異多様体 Y (実は再び $K3$ 曲面) が得られる. その Picard 格子 $\mathrm{Pic}\,(Y)$ は, 特異点解消の例外因子の既約成分である (-2)-曲線のクラスを含む. それらの (-2)-曲線のクラス全体は, 幾つかの ADE 型 Dynkin 図形の直和の構造をしており, これを格子 L_G として認識することができる. 結果として Y の Picard 格子は部分格子 L_G を含む. よく知られているように, Y の Picard 格子は, $K3$ 格子 $\Lambda_{K3} := U^{\oplus 3} \oplus E_8^{\oplus 2}$ の原始的な部分格子である一方 L_G は Λ_{K3} の原始的な部分格子であるとは限らず, L_G を含む最小の原始的な部分格子 $\widetilde{L_G} := L_G \otimes \mathbb{Q} \cap \mathrm{Pic}\,(Y)$ が存在する.

群 Q が位数 2, または 3 の巡回群 C_n $(n=2,3)$ に同型であったとする. このとき L_G を含む, $K3$ 格子 Λ_{K3} の中の最小の原始的な部分格子 $\widetilde{L_G}$ が一意的に定まることを証明することができた.