研究計画（枡田幹也）　２０２５年１２月

トーリックトポロジーを、トーラス群作用にまつわるトポロジー・幾何およびそれに関連する組合せ論の数学と捉えて、トーリックトポロジーの拡張、深化を図りたい。現在以下のテーマに取り組んでいるが、それを進展させる。

[I] 旗多様体の部分多様体であるヘッセンバーグ多様体にまつわる数学の研究。この１０年間，阿部拓、原田芽ぐみ、堀口達也氏らとヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環の研究を行った。その後、この研究は超平面配置との関連があることが分かり、グラフ理論における Stanley-Stembridge 予想と関連があることが分かっており，この観点から佐藤敬志氏らと共同研究を行っている。これまで

(1) コホモロジー環が次数 2 で生成されている正則半単純ヘッセンバーグ多様体の特徴づけ
(2) 正則ヘッセンバーグ多様体の twin と unicellular LLT 多項式との関係
(3) 正則ヘッセンバーグ多様体の自己同型群

に関する結果を得た。2 年余前に半単純ヘッセンバーグ多様体における modular law が GKM グラフの言葉で初等的に証明できることが分かった（佐藤氏と堀口氏との共同研究)。これと Abreu-Nigro の結果（証明は初等的）を合わせると，Brosnan-Chow によって証明された Shareshian-Wachs 予想の別証明が得られる。Brosnan-Chow の証明は，高度な代数幾何を用いたものである。これらの研究をさらに深め，最終的にヘッセンバーグ多様体の観点から（次数付きの）Stanley-Stembridge 予想の解決に繋げたい。なお，次数付きでない本来の Stanley-Stembridge 予想は疋田氏によって 1 年ほど前に肯定的に解決された．

[II] ハミルトニアンだがケーラーでない T^2 作用が Tolman によって 6 次元閉多様体上に構成されている．この作用は 6 個の不動点をもつ．この作用がどのような位置を占めているかを調べたい．そのためにまず，作用の不動点の個数が 4 個の場合を，Donghoon Jang，黒木慎太郎，佐藤敬志氏らと分類した．この研究成果を基に，６次元閉多様体で 6 個の不動点にもつ T^2 作用の分類を目指す．