3 今後の研究計画

考えたい代数幾何の階層構造は，以下の二つのタイプ (とそれらの合成) となります：

1. 基礎体 k を完全体とし，rationality (有理性) と ruledness (線織性) を interpolate する，次の (誰でも思いつきそうな) 階層構造 を考えます (ここで $\overset{\text{bir}}{\sim}$ は双有理同値を表します)：

$$\begin{cases} X \text{ is } \underline{(-i)\textit{-rational}} \text{ or } \underline{(n-i)\textit{-ruled}} \quad \text{for } 0 \leq i \leq n-1, \\ \text{if } \exists \text{ an } i\text{-dimensional variety } Z^i \text{ s.t. } \mathbb{P}^{n-i} \times Z^i \overset{\text{bir}}{\sim} X. \end{cases} \tag{1}$$

そして，Lüroth 以来，多くの数学者により研究されている，rational から rationally connected までの階層構造を，同様な 階層構造 たちの間の階層構造

$$\begin{aligned} (-i)\text{-rational} &\implies \text{stable } (-i)\text{-rational} \implies \text{ratract } (-i)\text{-rational} \\ &\implies \text{separably } (-i)\text{-unirational} \implies \text{separably } (-i)\text{-rationally connected} \\ &\implies (-i)\text{-rationally connected} \end{aligned}$$

にアップグレード出来ることを示し，これを探究することを基本的目標とします．今まで殆ど問題にされませんでしたが，極めて素朴なため，自然な問題が次から次へと湧き上がって来ます．
実際，これに関しては既に，次の成果を得ています：

> Norihiko Minami, Generalized Lüroth problems, hierarchized I: SBNR - stably birationalized unramified sheaves and lower retract rationality, **arXiv:2210.12225**

これは古典的代数幾何への応用ですが，Morel 氏が彼のモチビックホモトピー論に関する代表的著作である $\mathbb{A}^1$-Algebraic Topology over a Field (SpringerLNM 2012) で導入した，“unramified Zariski sheaf” という概念が，極めて重要な役割を果たしています．

2. 2 つの同次元複素射影多様体 X, Y が余次元 $> c$ 双有理同値 (若しくは 余次元 c で同型) とは，閉部分集合 $E_X \subset X$, $E_Y \subset Y$ で次の二つを満たすものが存在するときを言いましょう：

   - $X \setminus E_X \underset{f}{\xrightarrow{\sim}} Y \setminus E_Y$.
   - $\operatorname{codim}_X E_X > c, \quad \operatorname{codim}_Y E_Y > c$.

するとこれは，$c = 0$ の場合は，双有理同値に他ならず，$c = \dim X = \dim Y$ の場合は，双正則同値に他ならず，c を動かして得られる 階層構造 は，双有理代数幾何と双正則代数幾何を補間する，極めて自然なものとなっています．これら両極の代数幾何の設定に於ける不変量，即ち双有理不変量と双正則不変量に関しては，それらの重要性から膨大な研究がなされて多くの例が知られて居りますが，それらを補間するように，余次元 $> c$ 双有理不変量の例の探究を目指すのです．
実はごく最近，極めて満足の得られる結果が得られつつあり，その成果を

> Norihiko Minami, *Higher codimensional birational invariants* (仮題)

といった形で，只今執筆中で，その成果の一部は，2025 年 3 月 20 日 (木) に日本数学会年会トポロジー分科会一般講演で

> 南 範彦，純粋にトポロジーだけの範疇で定義される代数幾何的不変量

の題目にて，講演予定しました．
なお，ここで得られた多くの余次元 $> c$ 双有理不変量の例は，Hodge 予想や Tate 予想を表すのに用いられるサイクル写像やその類似物の余核や核となって居ります
更にごく最近，圏論的考察の自動定理証明援用への応用研究も，開始しました．