今後の研究計画

可換環論においては，様々な概念が定義され，それらは可換環論以外の様々な分野とも関連し，活発に研究が行われています。その中でも，Cohen-Macaulay 性と Gorenstein 性は，特に重要な研究対象として，活発に研究されています。

Cohen-Macaulay 環は，豊富に存在し，基礎環の Cohen-Macaulay 性を仮定することは，あまり強い仮定ではない一方，基礎環の Cohen-Macaulay 性を仮定することにより，様々な議論が進めやすくなることから，多くの理論の基盤として，Cohen-Macaulay 性が仮定されています。

一方 Gorenstein 環は，その環自身や，それから導出される様々な数学的対象に，美しい対称性を有する環です。このような特性から，Gorenstein 環についても，多くの研究者により，様々な分野とのつながりなども含め，非常に多岐にわたる研究が積み重ねられてきました。

そのような研究の積み重ねの中で，多くの研究者の間に，Gorenstein 性と Cohen-Macaulay 性の間に，比較的大きな開きがあるのではないかという認識が生まれてきました。そこで，その開きを埋めるべく，Gorenstein 性より弱く，Cohen-Macaulay 性より強い概念の模索が行われてきました。その中で，level 性，almost Gorenstein 性，nearly Gorenstein 性などが定義され，研究されてきました。しかしながら，これらの性質は，可換環の基本的な操作，特に可換環論において最も基本的とも言える操作である局所化との相性があまりよくありません。

2025 年に入り，私は Grassmann 多様体の Schubert 部分多様体の斉次座標環を調べていて，この斉次座標環の canonical module の trace ideal が radical ideal であることが，この環が Gorenstein 環であることと近いということを発見しました。そこで，この canonical module の trace ideal が radical ideal であるという性質が，Grassmann 多様体の Schubert 部分多様体の斉次座標環以外の環について，どのような場合に成り立つか調べたところ，cycle graph の stable set polytope の Ehrhart 環や，順序集合の chain polytope の Ehrhart 環などで，Gorenstein 性を特徴づける性質に，準ずる性質に対応していることがわかったのです。そこで私は，このような性質を持つ環を canonical trace radical ring と名付け，その性質を現在研究しているところです。Canonical trace radical 性は，可換環論の基本的操作との相性も，比較的よいので，Gorenstein 性と Cohen-Macaulay 性の間を埋める可換環論的性質の有力候補だと考え，これをさらに研究して行こうと考えています。