

## 今後の研究計画 溝口史華

私は、サイクルを含まない有限クイバーから冪零リー代数を定義した ([MT]). 定義に用いた道代数において、頂点は長さ 0 の道として扱われる。しかし、現在の冪零リー代数  $\mathfrak{n}_Q$  を得る方法は頂点を基底として含めていない。そこで、私は同様の方法で、長さ 0 の道として頂点を加えることによって、可解リー代数  $\mathfrak{s}_Q$  を得る新たな方法を定義する。次のクイバーについて考える。

$$\begin{array}{ccccccc} v_1 & \xrightarrow{a} & v_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{b_1} \\ \xrightarrow{b_2} \end{array} & v_3 & \xrightarrow{c} & v_4 \end{array}$$

このとき、このクイバーから得られる可解リー代数  $\mathfrak{s}_Q$  は、 $\mathfrak{s}_Q = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, a, b_1, b_2, c, ab_1, ab_2, b_1c, b_2c, ab_1c, ab_2c\}$ .  $\mathfrak{n}_Q$  は 10 次元冪零リー代数であり、 $\mathfrak{s}_Q$  は 14 次元可解リー代数である。冪零リー代数  $\mathfrak{n}_Q$  と同様に、可解リー代数  $\mathfrak{s}_Q$  も多彩な具体例を提供する。そこで、私は、 $\mathfrak{s}_Q$  がいつ特別な幾何構造を許容するかについて研究する。また、 $\mathfrak{s}_Q$  上の特別な幾何構造の存在性とクイバーの組合せ論的性質の関係性についても調べる。

クイバーから得られた冪零リー代数  $\mathfrak{n}_Q$  および可解リー代数  $\mathfrak{s}_Q$  が、(A) リッチ平坦擬リーマン計量、(B) シンプレクティック構造を許容する条件を明らかにする。さらに、(C) クイバーから可解リー代数を構成する方法を拡張する。それにより、広いクラスにおいて、幾何構造を調べることが可能となると期待される。

### (A) リッチ平坦擬リーマン計量

一般に等質リッチ平坦擬リーマン計量は平坦計量であるとは限らない。冪零リー群や可解リー群は平坦ではないリッチ平坦擬リーマン計量を許容する例を持つ。したがって、冪零リー群や可解リー群がいつ与えられた符号数のリッチ平坦擬リーマン計量を許容するかを調べる必要がある。そこで、以下の問題が考えられる。

**問題 1.** クイバーから得られる冪零リー代数  $\mathfrak{n}_Q$  および可解リー代数  $\mathfrak{s}_Q$  は与えられた符号数のリッチ平坦擬リーマン計量をいつ許容するか。

この問題に関して、現時点でクイバーから得られる冪零リー代数  $\mathfrak{n}_Q$  が 2-ステップの場合に結果を得ている ([M]). しかし、3-ステップ以上や任意の符号数について、また可解リー代数  $\mathfrak{s}_Q$  上では未解明である。

### (B) シンプレクティック構造

左不変シンプレクティック構造を許容する冪零リー群と可解リー群は多くの貴重な具体例を供給する。しかし、一般に与えられた冪零リー群がシンプレクティック構造を許容するかは低次元の場合を除いて不明である。そこで、次の問題を考える。

**問題 2.** クイバーから得られる冪零リー代数  $\mathfrak{n}_Q$  および可解リー代数  $\mathfrak{s}_Q$  はシンプレクティック構造をいつ許容するか。

この問題に関して、現時点でクイバーから得られる冪零リー代数  $\mathfrak{n}_Q$  が 2-ステップの場合に結果を得ている ([M]). 一方、3 ステップ以上の場合にはクイバーの構造が複雑になり、先行研究も少ないため、考察が必要となる。

### (C) 構成方法の拡張

クイバーから得られる冪零リー代数  $\mathfrak{n}_Q$  および可解リー代数  $\mathfrak{s}_Q$  には、これまでの先行研究では得られない具体例が豊富に含まれている。一方で、この方法では得られないリー代数も存在するため、構成方法の拡張が必要であると考えている。具体的には、サイクルを含むクイバーからサイクルを含まない道を考えることで冪零リー代数を得る方法を考えている。

## 参考文献

- [M] Mizoguchi, F. , Two-step nilpotent Lie algebras obtained by quivers and geometric structures, In: Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, to appear.
- [MT] Mizoguchi, F. and Tamaru, H., “Nilpotent Lie algebras obtained by quivers and Ricci solitons”, Adv. Math. **480** (2025), 110464 [22 pp].