これまでの研究結果のまとめ 溝口史華

微分幾何学において, 与えられたリー群が特別な左不変幾何構造を許容するかどうかを調べることは基本的な問題の一つである. 特に, リー代数上の幾何構造の存在性とリー代数の代数的性質の関係を調べることは重要な問題である. これに関して, Böhm, C.-Lafuente, R. A. によって, 等質多様体 M が拡大リッチソリトン g を許容するならば, (M, g) は左不変計量を持つ可解リー群と等長的であると示された ([BL]). リッチソリトンとは, 微分同相写像や拡大縮小で動かしたリッチフロー方程式の解であり, アインシュタイン ($\mathrm{ric}_g = c \cdot g$) を一般化した幾何構造である. この定理の主張は一般化 Alekseevskii 予想として知られており, リッチソリトン等質多様体は可解リー群に帰着されるが, いつ可解リー群が左不変リッチソリトンを許容するかは不明である. さらに, 可解リー群の特別な場合である冪零リー群はアインシュタインでないリッチソリトンの例を多く提供することから特に重要であると考えられる. 冪零リー群上のリッチソリトンにおいて, 2-ステップの場合に盛んに研究されている. 一方, ステップ数が高い冪零リー群は未解明な問題も多く, 知られている具体例も多くない.

そこで, 我々はクイバーから冪零リー代数を構成した. クイバーとは, ループと多重辺を許した有向グラフのことである. また, クイバーの道とは正しい向きにつながった矢の列であり, 矢の個数を道の長さという. クイバー Q に対して, $\mathfrak{n}_Q$ を Q のすべての道を基底とするベクトル空間とし, 道をつなげる演算を積として定めた代数を道代数という. この道代数の積から交代積として括弧積を定め, リー代数 $\mathfrak{n}_Q$ を定義した. ここで, サイクルとは始点と終点が一致する道のことである. サイクルを含むクイバーは道が無限に存在するため, 我々は, サイクルを含まない有限クイバーのみを考える. この方法は任意のステップ数の冪零リー代数を構成できる. さらに, 得られる冪零リー代数はクイバーという組合せ論的対象から得られることから比較的扱いやすい具体例である. 次のクイバー Q を考える.

$$\begin{tikzcd} \underset{v_1}{\bullet} \arrow[r, "a"] & \underset{v_2}{\bullet} \arrow[r, shift left, "b_1"] \arrow[r, shift right, "b_2"'] & \underset{v_3}{\bullet} \arrow[r, "c"] & \underset{v_4}{\bullet} \end{tikzcd}$$

このとき, Q から得られる冪零リー代数 $\mathfrak{n}_Q$ は, $\mathfrak{n}_Q = \mathrm{span}\{a, b_1, b_2, c, ab_1, ab_2, b_1c, b_2c, ab_1c, ab_2c\}$ である. 括弧積は, $[a, b_1] = ab_1$, $[a, b_2] = ab_1$, $[b_1, c] = b_1c$, $[b_2, c] = b_2c$, $[a, b_1c] = [ab_1, c] = ab_1c$, $[a, b_2c] = [ab_2, c] = ab_2c$. 括弧積は歪対称であり, そのほかの括弧積は 0 である. 我々は次の定理を示した.

定理 (M.-Tamaru, [MT])**.** *サイクルを含まない有限クイバー Q に対して, 得られる冪零リー代数を $\mathfrak{n}_Q$ とする. このとき, $\mathfrak{n}_Q$ に対応する単連結リー群は常に左不変リッチソリトンを許容する.*

我々の定義したクイバーから冪零リー代数を構成する方法は, 幾何構造を調べる上で有用であるため, 他の幾何構造への応用も期待される. 実際, リッチ平坦擬リーマン計量とシンプレクティック構造について次の結果を得た.

定理 ([M])**.** *クイバーから得られる冪零リー代数 $\mathfrak{n}_Q$ が 2-ステップのとき, 対応する単連結リー群は, すべてリッチ平坦擬リーマン計量を許容する.*

定理 ([M])**.** *クイバーから得られる冪零リー代数 $\mathfrak{n}_Q$ が 2-ステップのとき, 対応する単連結リー群が, シンプレクティック構造を許容する必要十分条件を示した.*

これらの結果は, 2-ステップの場合のみであり, 3-ステップ以上の場合については不明である. 以上のように, 幾何構造の存在性とクイバーの組合せ論的性質の関係性を調べる.

参考文献

[BL] Böhm, C. and Lafuente, R. A., "Non-compact Einstein manifolds with symmetry", J. Amer. Math. Soc. **36** (2023), no. 3, 591–651.

[M] Mizoguchi, F., "Two-step nilpotent Lie algebras obtained by quivers and geometric structures", In: Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, to appear.

[MT] Mizoguchi, F. and Tamaru, H., "Nilpotent Lie algebras obtained by quivers and Ricci solitons", Adv. Math. **480** (2025), 110464 [22 pp].