研究計画

村上 怜

複素幾何では，解析・微分幾何・代数幾何が相互に影響しながら，標準計量や正値性といった幾何学的対象を記述してきた．本研究では，非線形偏微分方程式（PDE）の可解性を出発点として，これら三つの理論を横断する統一的な幾何解析的枠組みを構築する．複素 Monge–Ampère（MA）方程式に対しては，可解性・曲率の正値性・代数幾何的正値性が一致するが，本研究はこの対応を，より一般の幾何的 PDE やベクトル束の標準計量問題へと拡張することを目的とする．さらに，その応用として，直線束の部分的豊富性，ベクトル束の豊富性，Bridgeland 安定性といった代数幾何の中心概念を，PDE を通して微分幾何的に再解釈することを目指す．

本研究計画は，以下の二つの柱から成る．

1. Hessian 方程式の可解性・正値性の研究：

MA 方程式では，Yau による Calabi 予想の解決により，可解性が曲率の正値性と対応する．さらに，小平埋め込み定理や中井–Moishezon 判定法を通じて，この曲率の正値性は豊富性や交叉数の正値性といった代数幾何的正値性と結びつく．一方，複素幾何において曲率は Hessian によって記述されるため，多くの幾何的方程式は Hessian 型の非線形 PDE として統一的に捉えられる．しかし，この一般的枠組みにおいて，可解性・微分幾何的正値性・代数幾何的正値性の対応がどこまで成立するかは，依然として十分に理解されていない．

本研究では，Hessian 方程式の一般的クラスに対し，この三者対応を体系的に確立する．可解性と微分幾何的正値性の対応については，Székelyhidi や Guo–Song により一定の理解が得られているため，本研究ではそれを基盤として，正値性が退化する状況を含む弱解理論を構築する．具体的には，論文 2 でも用いた手法を基に微分幾何正値性が退化した状況下での弱解の存在・一意性を示す．そして退化状況での解の極限挙動を解析することで，弱解の正則性と代数幾何的性質との関係を解明する．

さらに得られた対応を応用して，Andreotti-Grauert 理論に現れる部分的豊富性を，適切な Hessian 型方程式の可解性を通じて捉える．これにより，代数幾何における正値性概念を，非線形 PDE に基づく解析的手法から理解する新たな視点を提示する．

2. ベクトル束の標準計量・正値性の研究：

ベクトル束に対する標準計量の存在問題も，非線形幾何的 PDE を通じて理解されるべき重要な課題である．近年，Dervan–McCarthy–Sektnan により，正則ベクトル束の標準計量として Z 臨界計量が導入され，その存在は非線形方程式（Z 臨界方程式）の可解性として定式化された．Z 臨界計量は，代数幾何における Bridgeland 安定性に対応しうる微分幾何的概念として導入された．

本研究では，Z 臨界方程式の可解性を，曲率の正値性やスロープ型不等式といった数値条件により特徴づけることを目標とする．さらに，得られた特徴づけと Bridgeland 安定性がどのような条件の下で対応するかを明らかにする．これは，標準計量の存在と代数幾何的安定性の対応という，複素幾何における基本原理をベクトル束の文脈で深化させる試みである．

また，ベクトル束の正値性を解析的に捉えるアプローチとして，Demailly により提唱された非線形方程式系（Demailly 方程式）の研究も行う．この方程式系は，Griffiths 正値性という曲率条件を可解性によって特徴づけることを目的として導入されたものである．本研究では，1 次元での結果（論文 4）を出発点として，可解性・Griffiths 正値性・豊富性の対応を高次元へ拡張する．そしてその系として，ベクトル束の Griffiths 正値性と豊富性が同値であると主張する Griffiths 予想の解決を目指す．