

# 研究成果まとめ

村上 怜

申請者の研究は、「Kähler 幾何における標準計量の存在」および「微分幾何的正値性と代数幾何的正値性の対応」の解明である。Yau による Calabi 予想の解決は、Ricci 平坦な Kähler-Einstein 計量の存在を解明し、幅広い代数幾何への応用や Calabi-Yau 幾何の誕生を産んだが、その本質は複素 Monge-Ampère (MA) 方程式の可解性と曲率の正値性の対応を示したことであった。一方、小平埋め込み定理や中井-Moishezon 判定法により、この正値性が豊富性や交叉数の正値性といった代数幾何的概念で特徴づけられる。すなわち、MA 方程式では「可解性・微分幾何的正値性・代数幾何的正値性」の三者対応が成立する。

申請者はこの哲学を基に、J 方程式や変形 Hermitian-Yang-Mills (dHYM) 方程式などの標準計量方程式の可解性の研究や、一般の非線形幾何的偏微分方程式の可解性と正値性の関係の研究を行ってきた。

## 論文 1 の概要：

本論文では、ファイバー空間上の J/dHYM 方程式の可解性を、底空間およびファイバーの幾何から研究した。J 方程式は定スカラー曲率 Kähler 計量と関係し、dHYM 方程式はミラー対称性に現れる重要な方程式であるが、本研究では、これらの可解性が底空間・ファイバー双方の可解性から従うことを示した。特に dHYM 方程式では、従来仮定されていた優臨界条件の外側で可解性が成立する初の具体例を与えた。さらに、J/(優臨界)dHYM 方程式で既に確立している「可解性・微分幾何的正値性・代数幾何的正値性」の対応を踏まえると、本結果は底空間とファイバーの正値性が全空間へ遺伝することを意味する。逆に半正値性が全空間からファイバーと底空間へ遺伝することも示した。

## 論文 2 の概要：

本論文では、正値性が「半正値」に退化した状況での J/dHYM 方程式の弱解を研究した。先に述べたように、J/dHYM 方程式の可解性は、微分幾何的正値性や代数幾何的正値性によって特徴づけられる。本論文では、2次元の場合に、こうした正値性が退化した枠組みにおいて、放物型版である J/dHYM フローが J/dHYM 方程式の弱解へと収束することを示した。これらのフローは対応するエネルギー汎関数の勾配流として自然に定式化されており、その点で「標準的」な力学系を備えている。この構造により、フローの極限として得られる弱解が標準的解としての妥当性を持つことが保証される。

## 論文 3 の概要：

本論文では、MA 方程式や J 方程式を一般化した商 Hessian 方程式に対して、「可解性・微分幾何的正値性・代数幾何的正値性」の対応予想を提唱し、特別な空間で確立した。一般に可解性と微分幾何的正値性の対応は既に確立しており、代数幾何的正値性との対応については Székelyhidi が部分的な予想を提示していた。本論文では、完全に対応し得る代数幾何的正値性を提唱して、特別な射影空間束や半豊富直線束の第一 Chern 類に対して、この予想 (部分的には Székelyhidi の予想) を解決した。これは Székelyhidi の予想を実証した初の例でもある。

## 論文 4 の概要：

本論文では、リーマン面上で、ベクトル束の正値性を非線形方程式の可解性から特徴づける枠組みを構築した。直線束の場合には、小平埋め込み定理により正曲率計量の存在と豊富性が同値になるが、Griffiths はこれのベクトル束への一般化として、曲率の Griffiths 正値性と豊富性が同値であると予想した (Griffiths 予想)。近年 Demailly により、この正値性を捉えるための Monge-Ampère 型・Hermitian-Einstein 型の連立方程式系が提唱されたが、その可解性と正値性の関係は未解明であった。本研究では、この方程式系を 1次元で解析し、可解性が豊富性から従うことを示すことで、可解性・Griffiths 正値性・豊富性の三者が同値であることを明らかにした。特に、1次元における Griffiths 予想の新たな解析的証明を与えた。