

今後の研究計画

[1] スーパーコンピュータを用いた A 型 W -グラフの計算と解析

Kazhdan–Lusztig により定義された W -graph は、Weyl 群 W に対して有限グラフ上にあるデータを定めて、 W の表現空間を実現することができる。特に、 A 型の Weyl 群の場合には、left cell 表現と呼ばれる表現をヤング標準盤を用いて構成される。その計算のために、漸化式に基づく Kazhdan–Lusztig 多項式が必要となる。Weyl 群の位数が大きくなると、計算時間と計算データは膨大になる。これまでに、対称群 S_n の既約表現で、 $n = 16$, $\lambda = 44422$ の場合の 171,600 次元表現の W -グラフについては、パソコンで辺のデータは計算済みであるが、辺の重複度が 1 と 5 以外は登場しない。具体形の分析のためには、さらに、大きな n での計算結果が必要となる。そこで、スーパーコンピュータによるマルチコアプロセッサを用いた並列計算と大容量メモリー領域の使用により、さらなる計算を実行して多量のデータを蓄積し、そのデータを解析して、基本的なパターンを抽出するなどして一般的な形を予想し、その証明を試みるという手順で研究を進めたい。この際に、Stembridge の Admissible W -graph の理論との関係でどのように捉えれば良いのか、また、left cell の induction, restriction の理論との関係に注意しながら考察を進めてゆきたい。最近、AI を活用したパターン解析なども盛んに行われるようになったので、 n を大きくした場合の W -グラフの挙動などを AI による探索なども行いながらの検討も行いたい。

[2] シュプリンガー表現での既約成分への作用、 W -グラフとの類似性の確認

Weyl 群の既約表現の幾何学的な実現として、シュプリンガー表現が知られているが、その具体的な基底への作用については一般論でしか知られておらず、 A 型についても既約成分に対応する標準盤への作用を明示的に記述する式は知られていない。 W -グラフで得られる表現と非常に近い形をしていて、特殊な場合には一致する。しかし、一般的にそのようになっているか、あるいはズレがあるかは不明である。実際の検証は、小さな例でも計算は大変で、幾何学的な情報から組合せ論的なデータが抽出できるかどうかは鍵になる。[1] での研究とも関連させながら、類似性の視点から手掛かりはないか調べてゆきたい。

[3] 複素鏡映群 $G(r, 1, n)$ に付随する p -コンパクト群のシューベルト・カルキュラス

Hall–Littlewood 関数の同変版を用いることで、複素鏡映群 $G(r, 1, n)$ に付随する p -コンパクト群のグラスマン多様体にあたる対象の同変コホモロジーのシューベルト基底の類似を考えることができる。この環の構造について、シェバレー公式や一般の構造定数を組合せ論的に求めることができないかを具体例の計算や知られた非同変の場合の式などから考察してみたい。また、同時に全旗多様体の場合のシューベルト基底にあたる類似物の構成も古典型の場合を参考に行ってゆきたい。

[4] Motivic Chern 類を用いた仲田のフック公式の一般化について

仲田のフック公式の K -理論版を Motivic Chern 類を用いて定式化することは既にできているが、そのままでは複雑であり、特定の場合にはより簡潔な組合せ論的な記述も可能になる。仲田のフック公式を一般化する上で、 d -complete poset や minuscule heap といった組合せ論的な構造が重要である。これらの構造をうまく利用することで、 K -理論版の仲田のフック公式を Kac–Moody の Weyl 群に一般化できないかを検討してみたい。さらに、楕円コホモロジーの場合の類似物があるかどうかの考察も進める。