

研究計画

氏名： _____ 西中 祐介 _____

頂点代数と Costello–Gwilliam 因子化代数の関係についての研究を継続する。

■ 因子化代数の共形対称性

物理的に興味のある頂点代数は Virasoro Lie 環を内部対称性として含むものであり、このような頂点代数は共形頂点代数と呼ばれる。(非臨界レベルの) アフィン頂点代数や $\beta\gamma$ 頂点代数は共形頂点代数である。Costello と Gwilliam による頂点代数の構成法では、このような共形構造は現れないため次の課題が考えられる。

課題 1 : 因子化代数の共形対称性とは何かを考察し、因子化代数から共形頂点代数を構成せよ。

共形頂点代数は Virasoro Lie 環の生成元 L_n ($n \in \mathbb{Z}$) 全ての作用を受けているが、それよりも弱い条件として L_{-1}, L_0, L_1 の作用を受けている場合が考えられる。このような頂点代数は Möbius 頂点代数と呼ばれ、例えば臨界レベルのアフィン頂点代数は共形頂点代数でないが Möbius 頂点代数になっている。 L_{-1}, L_0, L_1 はそれぞれ平行移動、回転、反転の無限小生成子を表す。Costello と Gwilliam の方法では、複素平面 \mathbb{C} 上の等長変換群 $S^1 \times \mathbb{C}$ の作用で同変な因子化代数から頂点代数を構成しているので、平行移動と回転の対称性を備えた因子化代数が考察されている。さらに反転対称性を備えた場合は Riemann 球面 \mathbb{CP}^1 上の因子化代数を考察する必要があると思われる。そこで課題 1 に先行して、より具体的な次の問題を解決する。

課題 1' : Riemann 球面 \mathbb{CP}^1 上の射影特殊線形群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の作用で同変な因子化代数から Möbius 頂点代数を構成せよ。またこの構成が適用できる因子化代数の例を与えよ。

■ 頂点代数の Zhu 代数と因子化代数

Zhu 代数とは頂点代数 V から構成される結合代数 $\mathrm{Zhu}(V)$ であり、 V の既約な正エネルギー表現と $\mathrm{Zhu}(V)$ 上の単純加群の(同型類の間の) 一対一対応が知られている。したがって Zhu 代数は頂点代数の表現論において重要な対象である。一方で因子化代数の表現圏が何であるかはまだ確立されていない。因子化代数の表現の適切な定義を探るために、頂点代数と \mathbb{C} 上の因子化代数の対応の中でどのように Zhu 代数が現れるかを研究する必要がある。この問題の手がかりとして、実直線 \mathbb{R} 上の局所一定な因子化代数と結合代数の圏同値性が挙げられる。そこで次の課題に取り組む。

課題 2 : \mathbb{C} 上の因子化代数 \mathcal{F} を \mathbb{R} 上に退化させる方法で、退化させた因子化代数 $\mathcal{F}|_{\mathbb{R}}$ が局所一定となるものを与えよ。さらに $\mathcal{F}|_{\mathbb{R}}$ に対応する結合代数が \mathcal{F} に対応する頂点代数の Zhu 代数であることを示せ。

■ 因子化包絡によるアフィン \mathcal{W} -代数の構成

頂点代数の重要なクラスにアフィン \mathcal{W} -代数がある。このクラスの大部分は、頂点作用素の Fourier モードの交換関係に現れる非線形性により、Lie 共形代数の包絡頂点代数として表すことができない。このような非線形性を統一的に扱うため、De Sole と Kac は非線形 Lie 共形代数の概念を導入し、その包絡頂点代数を構成した。また結果として、全てのアフィン \mathcal{W} -代数はある非線形 Lie 共形代数の包絡頂点代数として表されることが示される。したがってプレプリント [N] の方法をそのままアフィン \mathcal{W} -代数に対して適用することはできないが、適切に修正することでアフィン \mathcal{W} -代数の因子化代数を構成できる可能性がある。そこで次の課題に取り組む。

課題 3 : 非線形 Lie 共形代数 L から因子化包絡によって \mathbb{C} 上の因子化代数を構成し、それに付随する頂点代数が L の包絡頂点代数と同型であることを示せ。

[N] Y. Nishinaka, *Factorization envelopes and enveloping vertex algebras*, preprint, arXiv: 2512.07635.