

研究成果

氏名： 西中 祐介

私の研究テーマは2次元共形場理論に関連する数学であり、これまで頂点代数や因子化代数を対象とした研究を行った。

研究 1: 超対称頂点代数のオペラッド

頂点代数は Borchers がムーンシャイン予想の解決のために導入した無限次元の代数系で、現在では2次元共形場理論の代数的定式化として知られている。これは整数 $n \in \mathbb{Z}$ で添字付けられた可算無限個の演算を備えた代数系と見ることができ、結合代数や Lie 環などの代数系に比べて複雑な構造を持っている。

代数系の演算は結合性や可換性などの対称性を満たしている場合があるが、このような演算の対称性を一般的に記述する概念としてオペラッド (operad) がある。例えば線形空間 V 上の Lie 環構造 (Lie 括弧積) を与えることは Lie オペラッド $\mathcal{L}ie$ から自己準同型オペラッド End_V への射を与えることと等価であり、この意味で $\mathcal{L}ie$ は Lie 環の構造を記述するオペラッドであると言える。オペラッドを用いて代数構造を記述する利点の一つは、その代数の変形理論を統制する dg Lie 環を導入できることにある。頂点代数の構造を記述するオペラッドは Bakalov, De Sole, Heluani, Kac によって構成された。

一方、超対称性を持った2次元共形場理論に現れる超場 (superfield) の統一的な扱いを目指して、Heluani と Kac は頂点代数の超場形式的な類似である超対称頂点代数 (SUSY vertex algebra) の概念を導入した。論文 [NY25] では、Bakalov らのオペラッドを拡張する形で、超対称頂点代数の構造を記述するオペラッドを構成し、超対称頂点代数の変形問題に関連するコホモロジーを計算した。さらに超対称頂点代数を退化させた構造である超対称 Poisson 頂点代数 (SUSY Poisson vertex algebra) のオペラッドも構成し、2つのオペラッドの関係を調べた。

研究 2: 頂点代数と複素平面上の因子化代数

Costello と Gwilliam によって導入された因子化代数は、一般の場の量子論における観測可能量の空間を持つ構造を抽象化して得られる概念である。彼らは、Costello によって数学的に定義された Riemann 多様体上の摂動的場の量子論から観測可能量の空間を構成し、それが因子化代数になることを示した。

頂点代数は2次元共形場理論の代数的定式化であるので、複素平面 \mathbb{C} 上の因子化代数と頂点代数の間に何らかの関係があるのではないかと期待できる。実際、Costello と Gwilliam は \mathbb{C} 上の因子化代数から頂点代数を取り出す一般的方法を与えた。また、彼らはアフィン頂点代数と $\beta\gamma$ 頂点代数からこの一般的方法を適用できるような因子化代数の例を構成し、付随する頂点代数がもとの頂点代数と同型であることを示した。これらの因子化代数は因子化包絡と呼ばれる重要な手法を用いて構成される。

頂点代数には Lie 共形代数の包絡頂点代数と呼ばれるクラスがある。これは Lie 環の包絡環のような普遍性を持つ頂点代数である。アフィン頂点代数や $\beta\gamma$ 頂点代数は包絡頂点代数として表せるので、Costello と Gwilliam による因子化代数の構成を包絡頂点代数の場合に一般化できると考えられる。プレプリント [N] ではこの一般化を行った。すなわち Lie 共形代数 L から因子化包絡によって因子化代数を構成し、それに付随する頂点代数が L の包絡頂点代数と同型であることを示した。さらにこの構成を L がパリティによる次数付け ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -次数付け) を持つ場合に拡張し、Neveu-Schwartz 頂点超代数や $N = 2, 4$ 頂点超代数に対応する新しい因子化代数が得られた。

[NY25] Y. Nishinaka, S. Yanagida, *Algebraic operads of SUSY vertex algebras and SUSY Poisson vertex algebras*, Adv. Math. **483** (2025) 110671, 115pp.

[N] Y. Nishinaka, *Factorization envelopes and enveloping vertex algebras*, preprint, arXiv: 2512.07635.