今後の研究計画

斎藤 俊輔

これまでに引き続き偏極多様体の標準計量の存在問題や安定性について研究を行う．今後の具体的な研究テーマを 3 つ挙げる．

一様相対 K 安定性・相対 K 不安定性の判定

偏極トーリック多様体の場合, 一様相対 K 安定性は Calabi の端的計量を特徴づける (例えば [3] 参照)．したがって与えられた偏極トーリック多様体の一様相対 K 安定性・相対 K 不安定性を判定することは Calabi の端的計量の存在・非存在を判定することと同じであり微分幾何的にも重要な課題である．今後は 3 次元トーリック Fano 多様体の場合にその (反標準偏極に関する) 安定性を完全に決定することを目指す．3 次元トーリック Fano 多様体は全部で 18 個あり, そのうち 13 個は一様相対 K 安定であることが既にわかっているが残りの 5 つについてはまったくわかっていない．一様相対 K 安定性や相対 K 不安定性の一般的な判定法や, 射影束・ブローアップなど個別の幾何的特徴を踏まえた新しい判定法を発見したいと考えている．

Segre 多様体の超平面切断に関する研究

$\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ 内の双次数 $(1,1)$ の超曲面 X の二木不変量は $m \neq n$ のときすべての偏極について 0 でない．このことから自然に「X が Kähler-Ricci ソリトン, 満渕ソリトンや端的計量などの標準計量を許容するか判定せよ」という問題が浮かぶ．まずは X の反標準偏極に関する満渕定数を計算することから取り組む．また「X の δ 不変量を計算せよ」という問題も代数幾何的に興味深い．$m = n$ の場合, X は等質 Kähler-Einstein 計量を許容するが, 「X 上の一般の Kähler 類についてスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するか否かを判定せよ」についても考えていきたい．一方で, 双次数が $(1,1)$ より高い場合は $m = n$ であっても Kähler–Einstein 計量を許容するかは一般にはわかっていない ($m = n = 3$ かつ双次数が $(1,2)$ と $(1,3)$ の場合が [1] で扱われているのみである) ため標準計量と安定性の双方の観点から調べたい．

強 K 安定性に関する研究

一般の偏極多様体においてスカラー曲率一定 Kähler 計量の存在を特徴づけるには元の K 安定性では不十分であろうという考えから, K 安定性の様々な強化概念が検討されてきた．私はこれらの間の関係に興味があり, 中でも満渕 [2] によって導入された強 K 安定性と他の強化概念の強弱について理解したい．まずはトーリック多様体の場合に, テスト配位の列に対する Donaldson–二木不変量を具体的に記述することから取り組む．

参考文献

[1] J. Cable, Kähler-Einstein metrics on symmetric general arrangement varieties. *Manuscripta Math.* **168** (2022), pp.119–135.

[2] T. Mabuchi, The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations. *Geometry and Analysis on Manifolds*, Birkhäuser, Cham, 2015, pp.395–403.

[3] Y. Nitta and S. Saito, A uniform version of the Yau-Tian-Donaldson correspondence for extremal Kähler metrics on polarized toric manifolds. arXiv:2110.10386.