

これまでの研究成果のまとめ

齋藤 俊輔

私の研究分野は複素幾何学であり、研究のキーワードは「K 安定性」である。これは偏極多様体が標準 Kähler 計量を許容するための条件として Tian, Donaldson によって導入された代数幾何学的な概念である。「偏極多様体上にスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在することとその多様体が K 安定であることは同値であろう」という主張が Yau–Tian–Donaldson 予想として知られ活発に研究されてきた。

論文 “K-instability of hyperplane sections of Segre Varieties” の要約

X を $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ 内の双次数 $(1, 1)$ の超曲面とする。これは Segre 多様体の超平面切断でもある。1980 年代に坂根や埴野は $m \neq n$ かつ X が滑らかなとき X 上の任意の Kähler 類にはスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在しないことを証明した。この結果にヒントを得て私は X の二木不変量を純代数的な手法を用いて計算し、 $m \neq n$ の場合に (滑らかとは限らない) X が任意の偏極について K 不安定であることを証明した。

論文 “Examples of relatively Ding unstable Calabi dream manifolds” の要約

一様相対 Ding 安定性は K 安定性とは異なる由来を持つ Fano 多様体の安定性であり、満洲ソリトンという標準計量の存在と同値であることや「一様相対 Ding 安定ならば反標準偏極について一様相対 K 安定である」ことが知られている。本論文では一様相対 Ding 安定性が一般には直積で保たれないことを証明し、任意の偏極について一様相対 K 安定だが相対 Ding 不安定な多様体の例を 3 以上のすべての次元に構成した。

論文 “A note on the Yotsutani-Zhou condition for relative K-instability” の要約

相対 K 安定性は偏極多様体が Calabi の端的計量を許容するための条件として導入された概念で K 安定性の一般化である。四ッ谷-Zhou はトーリック Fano 多様体が反標準偏極について相対 K 不安定であるための判定法を発見し、相対 K 安定な 3 次元トーリック Fano 多様体を完全に決定した。本論文では四ッ谷-Zhou の判定法を適用するための簡単な必要条件を発見し、彼らの判定法が適用できる 3 次元の例が実際には存在しないことを明らかにした。

論文 “Relative Ding and K-stability of toric Fano manifolds in low dimensions” の要約

具体的な偏極多様体が安定か否かを判定することは一般には難しい。しかし多様体の対称性が高ければそれが可能になる場合がある。例えばトーリック Fano 多様体の場合、その一様相対 Ding 安定性は、多様体に付随する満洲定数という有理数が 1 未満という条件と同値である。本論文では 4 次元以下のトーリック Fano 多様体すべての満洲定数を計算し、一様相対 Ding 安定であるものを完全に決定した。

論文 “Stability of anti-canonically balanced metrics” の要約

「反標準的 balanced 計量」は Kähler-Einstein 計量の幾何学的量子化として Donaldson によって導入された概念である。本論文では反標準的 balanced 計量を臨界点とする汎関数を考察することで新たに「F 安定性」を導入し「反標準的 balanced 計量が存在するならば F 安定である」、「反標準偏極について K 安定ならば漸近的 F 安定である」、「漸近的 Chow 安定ならば漸近的 F 安定である」などを明らかにした。