今後の研究計画

佐々木真二

1　差分方程式の標準形の理論

廣瀬三平氏, 竹井義次氏, 竹井優美子氏と共同で, 差分方程式 (ないしは微分・差分連立方程式) の完全 WKB 解析の一般論の確立へ向けて具体例の解析を始めており, 私自身は特に差分方程式特有の変わり点のである対数型変わり点の標準形の理論の基礎付けに興味を持っている. 対数型変わり点は竹井義次氏らが見出し, 最近の我々の共同研究で差分方程式に普遍的に現れることがわかりつつもので, その解析・標準形の理論は差分方程式の完全 WKB 解析の中核をなすと考えられる. 具体例の解析を進めつつ, 標準形理論の解析的基礎付けを進める.

また, 微分方程式との連立を考えるとき, 対数型特異点の問題は線形方程式の二重変わり点の問題と自然に結びつく. 連立方程式系としての標準形理論の確立を目指しつつ, 線形方程式の二重変わり点での標準形理論における解の正規化・接続公式等の問題の見直しを行う.

2　Painlevé 方程式の完全 WKB 解析の基礎付け

Painlevé 方程式の完全 WKB 解析は青木, 河合, 竹井らによって精力的に研究され, 多くの興味深い結果がある. しかしそこに現れる形式解にしても形式的変換論にしても, その解析的基礎付けを待つ状況である.

形式的変換論については, 付随する線形方程式の変換論 Borel 総和可能性が一部分かってきており, この問題の完全な解決を目指す. また形式解については, いわゆる 0 パラメーター解 (形式べき級数解) や 1 パラメーター解 (transseries 解) については解析的な意味付け (総和可能性) が知られているが, 最も一般的である 2 パラメーター解の解析的意味付けは未解決である. 古典的に知られている解の漸近的な挙動からは, 2 パラメーター解の収束や漸近的な楕円関数的挙動が期待されている. この問題については, 最も簡単である Painlevé I 型方程式の場合に結果が得られつつある. I 型に対して楕円関数的な漸近挙動まで得ることを目指しつつ, I 型以外の方程式について計算を進める.

3　高階 Painlevé 方程式の完全 WKB 解析

高階線形方程式の完全 WKB 解析, 特にその WKB 解の Borel 総和可能性は非常に難しい問題として知られている. 同様に, 高階 Painlevé 方程式の形式解の総和可能性も難しい問題と考えられているが, 高階 Painlevé 方程式の場合には多変数化が知られているものも多い. 高階方程式でも多変数化がある場合には Borel 総和可能性の問題が簡単になる可能性があり, そのような高階 Painlevé 方程式の Borel 総和可能性を検討する.

高階 Painlevé 方程式でも付随する線形方程式が 2 階の場合もあり, その場合は標準形への形式的変換論が 2 階線形方程式の変換論の延長上で扱えると思われる方程式もある. 形式的変換論の基礎付けについては, そのような高階 Painlevé 方程式も扱うことも目標としている.