今後の研究計画

佐藤 敬志

対称性の深淵を幾何学的な視点で探求するというテーマで研究を進めようと考えている。より具体的には次の問題に取り組む。

問題 1. 崩れた対称性の幾何学的・対称関数論的な実現である図 1（別紙これまでの研究成果参照）の平行四辺形の対応は、A 型以外の Hessenberg 多様体でも成立するのか？

問題 2. GKM 理論（後述）は旗多様体に関連する空間に対し最も有効に働くように見えるが、Hessenberg 多様体とその双子の関係性は GKM 理論的にどのように解釈されるのか？

問題 3. unicellular と限らない LLT 多項式と対応する幾何学的対象は何か？

詳しい目標の話に移る前に、GKM 理論について軽く紹介する。良いトーラス作用をもつ空間の同変コホモロジー環（Borel 構成後のコホモロジー環）は、その固定点集合と 1 次元軌道に注目すると完全に決定することができる。これを GKM 理論という。Hessenberg 多様体から双子を構成する方法は Borel 構成と密接に関係しており、双子自体も GKM 理論を適用できるトーラス作用を持つ。Hessenberg 多様体とその双子のコホモロジー環は GKM 理論を通して深く繋がっている。

それぞれの問題についての、今後数年における具体的な目標は以下の通りである。

目標 1. 個別の Lie 型について調べることになるが、まずは C 型での対応関係を与えたい。Hessenberg 多様体は任意の Lie 型で定まるので、双子に当たる空間を構成し、コホモロジーの表現を計算することで、対称関数を調べ、その組合せ論的な記述を得る。

目標 2. GKM 理論を Hessenberg 多様体とその双子に作用するトーラスの反転性という観点で発展させる。特に、それらに付随するファイバー束において発生する、ファイバーと底空間の反転現象を説明できる理論を構築する。

目標 3. 特に vertical-strip LLT 多項式と呼ばれる、unicellular LLT 多項式の次に簡単な場合について調べ、A 型の双子の一般化を与える。

これらの目標は互いに関連しており、それぞれを部分的に解決していきながら、その結果を他の目標に応用していくことを考えている（図 2 を参照）。GKM 理論を拡張するためには、適切な空間のクラスを把握する必要があり、それらの具体例を他の問いから得る。また、GKM 理論の拡張を幾何学的に理解することで、他の問いの双子を発見するヒントを得られるであろう。特に GKM 理論による計算は非常に具体的に実行できるという利点がある。

また、対称性を通じて、これらの研究対象は物理学から来る数学と関係しており、柏原の結晶基底や頂点作用素代数などから物理学的なヒントを得られるのではないかと考えている。

図 2：目標の関係と研究の進め方