今後の研究計画

佐藤拓也

- **消散型非線形 Schrödinger 方程式の解の最適な質量減衰オーダー:**

消散型非線形 Schrödinger 方程式の解の L^2 ノルム (以下、質量と呼ぶ) の減衰オーダーと空間変数に対する可微分性が結びつき、系の消散構造と正則性の関係が明らかになりつつある。応募者は、Li-Nishii-Sagawa-Sunagawa (2022) により得られた微分型非線形 Schrödinger 方程式に対する精密な解の漸近解析の手法や、Cazenave-Han-Naumkin (2021) の擬等角対称変換による漸近系の導出を参考にすることで、より一般の初期値を持つ偏微分方程式の解のシャープな解析を試みる。そして、消散双曲型の初期値問題の解の大域挙動 (Kim-Sunagawa (2014)) と消散分散型の問題 (消散型非線形 Schrödinger 方程式) に対する解の大域挙動とが本質的に異なることを示したい。このずれは、波の有限伝播性や無限伝播性といった方程式の機構の違いによるものであり、これらが明らかになれば消散分散型の問題が記述する数理現象の解明につながることが期待される。

- **非線形 Schrödinger 連立系に内在する消散性の解明:**

非線形 Schrödinger 方程式に備わるゲージ不変な非線形項は、線形主要部の基本振動数を変えずに振幅を増大させる系の共鳴現象を引き起こし、系がハミルトン構造を有することを保証する。Raman 共鳴を誘引する 2 次の非線形項を持つ 2 成分連立非線形 Schrödinger 方程式に関しては、ラプラシアンの係数に応じて解の漸近挙動が異なることが知られている。係数の比率が解別な場合には、その対称性から解の L^2 ノルムの総和 (以下、質量と呼ぶ) やエネルギー汎関数が時間について不変となる。一方係数がずれる場合 (いわゆる非共鳴条件) では、線形部と非線形部の振動のずれが生じて、共鳴的な非線形項を備える単独非線形 Schrödinger 方程式の解とは異なった漸近挙動を伴う (cf. Li-Sunagawa (2016))。これら 2 成分連立系特有の複雑さゆえ解の大域挙動を知るためには、より緻密な解の漸近展開が必要となる。そのために、解の時間無限遠での漸近系を規定する常微分方程式系を考察し、実解析性や Gevrey 正則性が保証する解の冪級数展開を援用する。応募者は将来、連立系の問題を考える上で取得した漸近展開の方法を用いることで、非共鳴条件を満たす連立系の問題に対する解析的手法を確立したい。

- **消散型非線形 Schrödinger 方程式が物理現象へ与える影響の解明:**

質量保存系の非線形 Schrödinger 方程式に対して、波動函数を密度と速度場に変換する Madelung 変換を行うことで Korteweg-Euler 方程式が導かれる。これは量子流体に関連する運動方程式であるが、量子間の摩擦がほとんど無視できる理由から方程式には粘性項が含まれない。そのため、この運動方程式は絶対零度付近における粒子系の Bose-Einstein 凝縮、すなわち粒子間の摩擦を無視した量子流体の挙動を記述するが、近年、この量子流体と温度を上げて粒子間の摩擦を考慮した常流体との混合 2 流体モデルが盛んに研究されている。応募者は、ある種の消散効果を考慮した消散型非線形 Schrödinger 方程式に Madelung 変換を施すことで、粘性項が含まれる分散型圧縮性 Navier-Stokes 方程式を導出し、消散性と粘性の関係を数学的に与えることで 2 流体モデルの挙動を数学的に解明したい。